یونٹ 7

علم ہندسہ کے بنیادی تصورات

7.1 استقرائی اور استخراجی استدلال

روزمرہ زندگی میں اکثر و بیشتر ایسے مواقع آتے ہیں کہ ہم مشاہدے کی بنیاد پر نتائج اخذ کرتے ہیں۔ مثلاً

(الف) ہم چند درختوں کا مشاہدہ کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ ان کی پتیاں سبز ہیں اور اس سے یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ "تمام درختوں کی پتیاں سبز ہیں"۔

(ب) ہم یکے بعد دیگرے 8 یا 10 مثلث لیتے ہیں اور ہر ایک کے زاویوں کی پیمائش کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ ہر مثلث کے زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہے اس سے یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ "کسی بھی مثلث کے تمام زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے"۔

اس طرح کسی عمومی نتیجے پر پہنچنا استقرائی طریقہ استدلال (*Inductive Method*) کہلاتا ہے۔

تاہم استقرائی طریقہ کے استعمال کے دوران چند احتیاطیں مدِنظر رکھنی چاہئیں ورنہ ہم غلط نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔

احتیاطیں یہ ہیں:

(1) عمومی نتیجے پر پہنچنے کے لیے کافی تعداد میں مثالوں کا مشاہدہ کرنا چاہیے۔

(2) جو مثالیں زیرِ غور ہوں جامع ہونی چاہئیں۔

ان تمام احتیاتوں کے باوجود استقرائی طریقہ سے حاصل شدہ نتیجے کے صحیح ہونے کا یقین نہیں کیا جا سکتا۔ اسی وجہ سے ریاضی کی زیادہ تر شاخوں بالخصوص علم ہندسہ (*Geometry*) کو استخراجی طریقہ استدلال (*Deductive Method*) کے ذریعہ سمجھا جاتا ہے۔

استخراجی طریقہ میں ہم عمومی نتائج سے خصوصی نتائج اخذ کرتے ہیں۔

مثلاً ہمارے علم میں ہے کہ "ہر شخص فانی ہے"۔

اس حقیقت سے ہم مخصوص افراد کے بارے میں نتائج اخذ کر سکتے ہیں جیسے

ذوالفقار ایک آدمی ہے اس لیے ذوالفقار فانی ہے

کریم ایک آدمی ہے کہ اس لیے کریم فانی ہے

اسی طرح ہم جانتے ہیں کہ ایک مثلث کے زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہے اس بات سے ہم مخصوص مثلثوں کے بارے میں نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔

مثلاً

ABC ایک مثلث ہے اس لیے $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

PQR ایک مثلث ہے اس لیے $m\angle P + m\angle Q + m\angle R = 180°$

استخراجی طریقہ کا ہمیشہ یہ مطلب نہیں ہے کہ ہم ایک عمومی بیان سے ایک خصوصی بیان اخذ کرتے ہیں استخراجی طریقہ میں یقین کا عنصر ہمیشہ موجود ہوتا ہے۔ اس طریقے میں ہم ایک بیان کو صحیح مانتے ہیں جو اُن بیانات سے ماخوذ ہوتا ہے جو پہلے ہی صحیح تسلیم کیے جا چکے ہوں یا ثابت کیے جا چکے ہوں۔ اس طریقہ میں علیحدہ سے استدلال یا خارجی شواہد کی ضرورت نہیں پڑتی جیسا کہ استقرائی طریقہ میں ہوتا ہے۔ استخراجی استنباط دراصل ایک عقلی تجزیہ، ایک منطقی لازمہ ہے۔

7.2 استخراجی طریقہ کے اوصاف

علم کی کوئی بھی شاخ جو استخراجی طریقے سے متعلق ہو مندرجہ ذیل اوصاف (*Characteristics*) رکھتی ہے۔

(i) کچھ تصورات بغیر تعریف کے قبول کر لیے جاتے ہیں جو "غیر تعریف شدہ اصطلاحات" (*Undefined Terms*) کہلاتی ہیں۔ مثلاً علم ہندسہ میں نقطہ، خط، مستوی، مکان غیر تعریف شدہ اصطلاحات ہیں۔ اور ان تصورات کو بغیر تعریف کے قبول کر لیا گیا ہے۔

(ii) غیر تعریف شدہ اصطلاحات کی مدد سے کچھ بیانات بلا ثبوت مان لیے جاتے ہیں۔ جنھیں بنیادی مفروضے (*Fundamental Agreement*) کہتے ہیں۔ یہ بیانات ان اوصاف کا تعین کرتے ہیں جنھیں ہم غیر تعریف شدہ اصطلاحات سے وابستہ کرنا چاہتے ہیں ایک ریاضی دان کو ان بیانات کی صداقت سے کوئی دلچسپی نہیں ہوتی۔ بنیادی مفروضے دراصل فرض کی ہوئی بات ہے۔ جو ضروری نہیں کہ بدیہی سچ ہوں۔ ان مفروضوں سے منطقی استدلال استعمال کرتے ہوئے کوئی چیز وضع کی جا سکتی ہے۔

بنیادی مفروضے دو طرح کے ہوتے ہیں۔ اصول متعارفہ (Axioms) اور اصولِ موضوعہ (Postulates)

اصول متعارفہ وہ بنیادی مفروضے ہیں جو اعداد سے متعلق ہوتے ہیں مثلاً

''ہر عدد خود اپنے برابر ہے۔''

یا ''ایک ہی عدد اگر مساوی اعداد میں جمع کیے جائیں تو ان کے مجموعے برابر ہوتے ہیں''

اصول موضوعہ وہ بنیادی مفروضے ہیں جو ہندسی اشکال سے متعلق ہوتے ہیں مثلاً

''دو مختلف نقاط میں سے صرف ایک ہی خط گزرتا ہے۔''

(iii) غیر تعریف شدہ اصطلات اور بنیادی مفروضوں (یعنی اصول موضوعہ) کی مدد سے دیگر تصورات کی تکمیل کی جاتی ہے۔ اور مزید اصطلاحات کی تعریف کی جاتی ہے۔ ان کو تعریف اصطلاحات کہتے ہیں۔

مثلاً '' ایک مستطیل ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں کم از کم ایک زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔''

(iv) غیر تعریف اصطلاحات، اصول موضوعہ اور تعریف شدہ اصطلاحات کی مدد سے نئے بیانات متعارف کرائے جاتے ہیں اور استنباط کے ذریعے ثابت کیے جاتے ہیں ایسے بیانات کو مسائل ہندسی (Theorems) کہا جاتا ہے۔

مثلاً '' اگر ایک مثلث کے دو ضلعوں کے متقابلہ زاویے متماثل ہوں تو وہ ضلعے بھی متماثل ہوتے ہیں۔''

اب ہم چند بنیادی اصطلاحات اور متعلقہ اصول موضوعہ پر غور کرتے ہیں جو ہمیں مسائل کو سمجھنے اور انھیں استنباط کے ذریعے ثابت کرنے میں رہنمائی فراہم کرتے ہیں۔

7.3 بنیادی تصورات

7.3.1 غیر تعریف شدہ اصطلاحات (Undefined Terms)

جیسا کہ پہلے بیان ہو چکا ہے کہ اصطلاحات نقطہ، خط، مستوی اور مکان کو بلا تعریف قبول کر لیتے ہیں۔

نقاط کو انگریزی کے بڑے حروف سے پکاریں اور ظاہر کریں گے:

وغیرہ ......, P_2, P_1......, R, Q, P.........., C, B, A

خطوط کو انگریزی کے چھوٹے حروف سے ظاہر کریں گے:

وغیرہ ...... l_3, l_2, l_1........., n, m, l, ..., c, b, a

مستویوں (Plans) یعنی مستوی سطحوں کو اس طرح ظاہر کریں گے:

$p, q, r, \ldots\ldots\ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots$ وغیرہ یا یونانی الفاظ α, β, γ .... وغیرہ

$P \in l$ کا مطلب ہے نقطہ P خط l پر ہے یا خط l نقطہ P سے گزرتا ہے۔

اسی طرح $l \in \alpha$ کا مطلب ہے: خط l مستوی α پر ہے یا مستوی α خط l سے گزرتا ہے۔

نقاط کے سیٹ ہندسی اشکال کہلاتے ہیں۔ پس خط اور مستوی بھی ہندسی اشکال ہیں۔ ہندسی اشکال کاغذ یا کسی دوسری شئے پر ان کی تصاویر کے ذریعے ظاہر کی جاتی ہیں۔ مثال کے طور پر نقطہ کی تصویر ایک چھوٹی سی بندی (·) ہوتی ہیں۔ یہ بندی بجائے خود نقطہ نہیں بلکہ اس نقطہ کی تصویر ہے جو وہاں واقع ہے۔ چھوٹی ترین بندی نقطہ کا بہترین اظہار ہے۔ بالکل اسی طرح "ایک خط کھینچنے" کا مطلب ہے "خط کی تصویر بنانا"۔

ابتدائی طور پر مندرجہ ذیل چند باتیں سامنے آتی ہیں:

(i) نقطہ، خط کا تحتی سیٹ ہے خط مستوی کا تحتی سیٹ اور مستوی، مکان کا تحتی سیٹ ہے۔ لہٰذا ایک نقطہ مستوی کا اور مکان کا تحتی سیٹ ہے اسی طرح ایک خط مکان کا تحتی سیٹ ہے۔

(ii) ایک نقطہ میں کوئی بعُد (*Dimension*) نہیں ہوتا ہے۔ خط میں ایک بعُد ہوتا ہے یعنی "لمبائی"۔ مستوی میں دو بعد ہوتے ہیں یعنی لمبائی اور چوڑائی مکان میں تین بعد ہوتے ہیں یعنی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی (یا گہرائی)۔

7.3.2 منطبق نقاط

اگر دو نقاط P اور Q ایک ہی محل وقوع ظاہر کرتے ہوں تو انھیں منطبق نقاط (*Coincident Points*) کہتے ہیں اور علامتی طور پر $P = Q$ لکھتے ہیں۔

7.3.3 منطبق خطوط

اگر دو خطوط l_1 , l_2 ایک ہی خط کو ظاہر کرتے ہوں تو انھیں منطبق خطوط (*Coincident Lines*) کہتے ہیں اور علامتی طور پر $l_1 = l_2$ لکھتے ہیں۔

اصول موضوعہ 1. دو مختلف نقاط سے صرف اور صرف ایک ہی خط گزرتا ہے۔

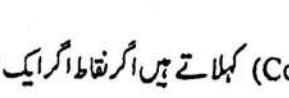
یا دو نقاط ایک خط کا تعین کرتے ہیں۔

نوٹ 1. "ایک اور صرف ایک خط گزرتا ہے" کے معنی ہیں ایک سے زیادہ نہیں، صرف ایک ہی خط گزرتا ہے۔ اگر ایک سے زیادہ خطوط ہوں تو وہ منطبق خطوط ہوتے ہیں یعنی ایک ہی خط۔

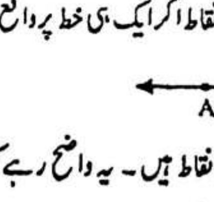
نوٹ 2. یہ اصول موضوعہ دلالت کرتا ہے کہ دو مختلف خطوط l اور m میں اگر کوئی مشترک نقطہ ہے تو وہ صرف ایک ہوگا یعنی دو مختلف خطوط کا تقاطع سیٹ خالی یا ایک رکنی ہوتا ہے۔

7.3.4 ہم خط اور غیر ہم خط نقاط

اگر نقاط ایک ہی خط پر واقع ہوں تو ہم خط نقاط (Collinear Points) کہلاتے ہیں اگر نقاط اگر ایک ہی خط پر واقع نہ ہوں تو غیر ہم خط نقاط (Non - Collinear Points) کہلاتے ہیں۔



نقاط A, B اور D ہم خط نقاط ہیں لیکن C, B, A یا D,C,A یا D,C,B,A غیر ہم خط نقاط ہیں۔ یہ واضح رہے کہ اصول موضوعہ 1 کی رو سے دو نقاط ہمیشہ ہم خط ہوتے ہیں۔ مثلاً B اور C , C اور D , A اور C ہم خط نقاط ہیں۔



اصول موضوعہ 2. ایک نقطہ سے بے شمار خطوط گزر سکتے ہیں۔

خطوط $l_1, l_2, l_3, ..., l_n$ نقطہ O سے گزر رہے ہیں۔

اصول موضوعہ 3. تین غیر ہم خط نقاط سے صرف اور صرف ایک مستوی گزرتی ہے۔

اصول موضوعہ 4. اگر ایک خط l کے کوئی دو نقاط مستوی پر واقع ہوں تو پورا خط مستوی پر واقع ہوتا ہے۔

نوٹ: اس اصول موضوعہ سے یہ واضح ہے کہ مستوی کی سطح ہموار ہوتی ہے اور ہر طرف لامحدود ہوتی ہے یعنی اس کا کوئی کنارا نہیں ہوتا۔

اصول موضوعہ 5. فاصلہ کا موضوعہ: اگر A اور B کسی مستوی کے دو مختلف نقاط ہوں تو مستوی کے نقاط کے ہر جوڑے (P,Q) کے ساتھ ایک حقیقی عدد اس طرح وابستہ کیا جاسکتا ہے کہ

(i) اگر (P,Q) = (A,B) تو یہ عدد 1 (ایک) ہوتا ہے۔

(ii) اگر P = Q تو یہ عدد 0 (صفر) ہوتا ہے۔

(iii) اگر P, Q مختلف ہوں تو یہ عدد مثبت ہوتا ہے۔

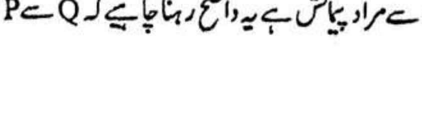
اس اصول موضوعہ کے مطابق دو نقاط کے کسی جوڑے سے جو مثبت عدد وابستہ ہوتا ہے وہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ کا فاصلہ کہلاتا ہے۔ P سے Q کا فاصلہ $m\overline{PQ}$ یا $|\overline{PQ}|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ m سے مراد پیمائش ہے یہ واضح رہنا چاہیے کہ Q سے P کا فاصلہ $m\overline{QP}$ یا $|\overline{QP}|$ ہے اور

$$m\overline{QP} = m\overline{PQ} \quad \text{یا} \quad |\overline{QP}| = |\overline{PQ}|$$

7.3.5 درمیان اور پرے

اگر A, B, C کوئی بھی تین ہم خط نقاط اس طرح ہوں کہ

$$m\overline{AB} + m\overline{BC} = m\overline{AC},$$



تو نقطہ B نقاط A اور C کے درمیان (*Between*) کہلاتا ہے۔

نقطہ C خط AB پر نقطہ B سے پرے (*Beyond*) کہلاتا ہے۔ اسی طرح نقطہ A خط BC پر B سے پرے ہے۔

7.3.6 قطعہ خط (*Line Segment*)

اگر A اور B کوئی بھی دو نقاط ہیں تو قطعہ خط AB جسے $\overline{AB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، ایسے نقاط کے سیٹ پر مشتمل ہے جس میں

(i) نقاط A اور B اور (ii) A اور B کے درمیان تمام نقاط ہوتے ہیں۔

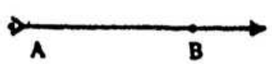
نقاط A اور B قطعہ خط AB کے سرے (*End Points*) کہلاتے ہیں۔

7.3.7 شعاع اور نصف خط (*Ray and Half Line*)

اگر A اور B کوئی دو نقاط ہوں تو شعاع AB جسے $\overrightarrow{AB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو کہ اتصال ہے۔

(i) $\overline{AB}$ کے تمام نقاط اور (ii) $\overleftrightarrow{AB}$ کے B سے پرے کے تمام نقاط کا

A کو $\overrightarrow{AB}$ کا سرا کہتے ہیں۔



نقطہ A کے علاوہ شعاع AB کو نصف خط AB کہتے ہیں۔ جسے $\overrightarrow{AB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اسی طرح $\overrightarrow{BA}$ اتصال ہے:

(i) $\overline{AB}$ کے نقاط اور (ii) $\overleftrightarrow{BA}$ کے A سے پرے کے تمام نقاط کا

مندرجہ بالا تعریف سے ظاہر ہوتا ہے کہ

$$\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB} \quad \text{اور} \quad \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$$

7.3.8 محدب سیٹ

ایک مستوی کے نقاط کا ایسا سیٹ محدب سیٹ (*Convex Set*) کہلاتا ہے اگر اس سیٹ کے کسی دو نقاط A اور B کے لیے قطعہ خط AB اس سیٹ میں موجود ہو۔

قطعہ خط، شعاعیں، خطوط اور مستوی محدب سیٹ ہیں چند غیر محدب سیٹ نیچے دیے گئے ہیں۔

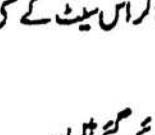


Fig (i)

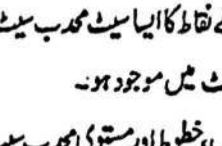


Fig (ii)

شکل (i) محدب سیٹ نہیں ہے شکل (ii) میں $P \cap Q$ محدب سیٹ ہے لیکن $P \cup Q$ محدب سیٹ نہیں ہے۔

7.3.9 مخالف شعاعیں

دو شعاعیں $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ مخالف شعاعیں (*Oposite Rays*) کہلاتی ہیں اگر

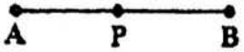
(i) دونوں ہم خط ہوں

(ii) دونوں کا سرا مشترک ہو

(iii) ان کا تقاطع صرف مشترک سرا ہو۔

مندرجہ، بالا تصویر میں $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ مخالف شعاعیں ہیں کیونکہ وہ متعلقہ شرائط پر پوری اترتی ہیں۔

اصول موضوعہ 6. ایک قطعہ خط کی تنصیف صرف اور صرف ایک نقطہ پر کی جاسکتی ہے۔

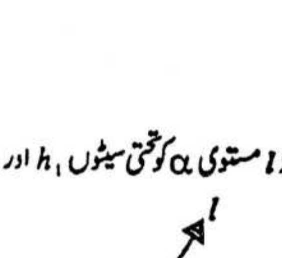


اس اصول موضوعہ کے اعتبار سے ایک قطعہ خط AB پر صرف اور صرف ایک نقطہ (فرض کیا P) A اور B کے درمیان ایسا ہوتا ہے کہ

$$m\,\overline{AP} = m\,\overline{BP}$$

اصول موضوعہ 7. ایک قطعہ خط کو دونوں اطراف کسی بھی حد تک بڑھایا جاسکتا ہے۔

اصول موضوعہ 8. مستوی کے بٹوارے کا موضوعہ: اگر خط l کسی مستوی α پر واقع ہو تو، خط l مستوی α کو تحتی سیٹوں h_1 اور h_2 میں اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ



(i) h_1 اور h_2 میں سے ہر ایک محدب سیٹ ہے اور

(ii) اگر P، l_1 پر اور Q، l_2 پر میں واقع ہو تو PQ خط l کو قطع کرتا ہے۔

تعریفات:

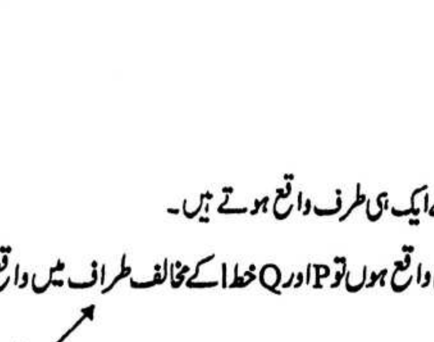
(i) h_1 اور h_2 میں سے ہر ایک کو نصف مستوی کہتے ہیں۔

(ii) خط l کو ہر نصف مستوی کا کنارا (*Edge*) کہا جاتا ہے۔

(iii) اگر دو نقاط ایک ہی نصف مستوی میں واقع ہوں تو وہ خط l کے ایک ہی طرف واقع ہوتے ہیں۔

(iv) اگر P ایک نصف مستوی اور Q دوسری نصف مستوی میں واقع ہوں تو P اور Q خط l کے مخالف طراف میں واقع ہوتے ہیں۔

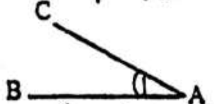
7.3.10 زاویہ



ایک زاویہ (*Angle*) دو ایسی غیر ہم خط شعاعوں کا اتصال ہے جن کے سرے مشترک ہوں۔

شعاعیں جو زاویہ کی تشکیل کرتی ہیں اسکے ضلعے (یا بازو) کہلاتے ہیں اور مشترک نقطہ زاویہ کا راس کہلاتا ہے۔

اس شکل میں $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ دو غیر ہم خط شعاعیں ہیں جن کا ایک مشترک سرا O ہے $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ زاویہ AOB کے ضلعے اور O اس کا راس ہے۔ زاویہ کو علامت "$\angle$" سے ظاہر کیا جاتا ہے اس طرح اوپر دیے ہوئے زاویہ کو $\angle AOB$ یا $\angle BOA$ یا $\angle O$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

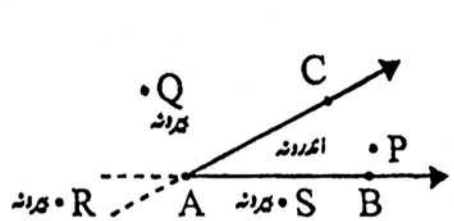


اس شکل میں دو قطعات $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کا اتصال زاویہ کی پوری نمائندگی نہیں کرتا لیکن $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ شعاعوں $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ کا تعین کرتے ہیں جو زاویہ BAC (یا $\angle CAB$) کی مکمل تشکیل کرتی ہیں۔ یوں $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ زاویہ BAC کا تعین کرتے ہیں۔ جسے $\angle BAC$, $\angle CAB$ یا $\angle A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

کبھی کبھی زاویہ کو عدد یا حرف کی شکل میں خاص نام دیا جاتا ہے۔

مثلاً $\angle 1, \angle 2, \ldots, \angle x, \angle y, \ldots$ وغیرہ

7.3.11 زاویہ کا اندرونہ اور بیرونہ



اس شکل میں نقطہ P زاویہ BCA میں (کے اندر) ہے اگر

(i) نقاط P اور C خط AB کے ایک ہی طرف واقع ہوں۔

(ii) نقاط P اور B خط AC کے ایک ہی طرف واقع ہوں۔

مستوی کے ایسے تمام نقاط کا سیٹ جو زاویہ کے بازوؤں کے درمیان ہوں "زاویہ کا اندرونہ" (*Interior of an angle*) کہلاتا ہے۔

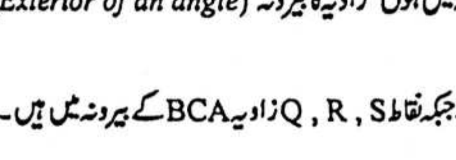
مستوی کے ان تمام نقاط کا سیٹ جو نہ زاویہ کے بازوؤں پر ہوں اور نہ اندرونہ میں ہوں "زاویہ کا بیرونہ" (*Exterior of an angle*) کہلاتا ہے۔

اوپر دی ہوئی شکل میں نقطہ P زاویہ BAC کے اندرونہ میں ہے۔ جبکہ نقاط Q , R , S زاویہ BCA کے بیرونہ میں ہیں۔

نقاط C, B, A زاویہ BAC کے نقاط ہیں۔

اصول موضوعہ 9. زاویہ کی بناوٹ کا موضوعہ

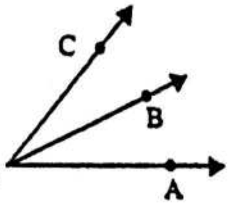
اگر زاویہ کا ایک بازو کسی نصف مستوی کے ایک کنارے پر ہو تو $0°$ اور $180°$ کے درمیان کسی بھی پیائش کا زاویہ بنانے کے لیے صرف اور صرف ایک شعاع کھینچی جا سکتی ہے۔



اوپر دی ہوئی شکل میں شعاع $\overrightarrow{OA}$ نصف مستوی h کے ایک کنارے پر ہے۔ اب $\theta°$ کا زاویہ بنانے کے لیے جبکہ $0° < \theta° < 180°$ ، صرف ایک شعاع $\overrightarrow{OB}$ اس طرح کھینچی جا سکتی ہے کہ $\angle AOB = \theta°$

اس موضوعہ کے مطابق °0 اور °180 کا کوئی زاویہ نہیں ہے لیکن کسی زاویے کی پیمائش "°0 اور °180 کے درمیان ہو سکتی ہے۔ دو زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ °180 یا زائد لیکن °360 سے کم ہو سکتا ہے۔

7.3.12 متصلہ زاویے



دو زاویے متصلہ زاویے (*Adjacent Angles*) کہلاتے ہیں اگر

(i) ان کی راس مشترک ہوں

(ii) ایک بازو مشترک ہو

(iii) ان کے اندرونے کا تقاطع خالی سیٹ ہو

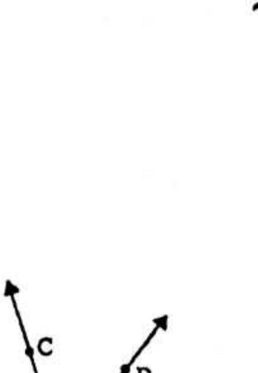
دی ہوئی شکل میں AOB∠ اور COB∠ متصلہ زاویے ہیں اس لیے کہ

(i) O ان کی مشترک راس ہے

(ii) $\overline{OB}$ ان کا مشترک بازو ہے

(iii) ان کے اندرونے کا تقاطع خالی سیٹ ہے۔

اصول موضوعہ 10. زاویوں کی جمع کا موضوعہ

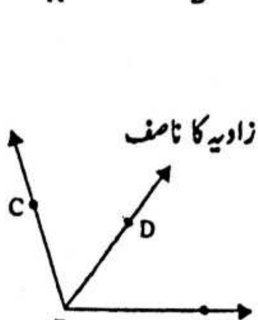


دو متصلہ زاویوں کا مجموعہ وہ زاویہ ہے جو ان کے غیر مشترک بازوؤں سے بنتا ہے۔

اس شکل میں BAD∠ اور CAD∠ دو متصلہ زاویے ہیں۔ یوں

$$m\angle BAD + m\angle CAD = m\angle BAC$$

7.3.13 زاویے کا ناصف



اگر دو متصلہ زاویے برابر ہوں تو ان کا مشترک بازو، غیر مشترک بازوؤں سے بننے والے زاویہ کا ناصف (*Bisector of an Angle*) کہلاتا ہے۔

اس شکل میں

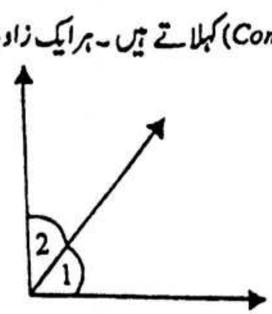
$$m\angle ABD = m\angle CBD = \frac{1}{2}\, m\angle ABC$$

اس لیے $\overrightarrow{BD}$ زاویہ ABC کا ناصف ہے۔ یعنی $\overrightarrow{BD}$ زاویہ ABC کو دو برابر زاویوں میں تقسیم کر دیتا ہے۔

اصول موضوعہ 11. زاویہ کا ایک اور صرف ایک ناصف کھینچا جا سکتا ہے۔

7.3.14 کمپلیمنٹری زاویے

اگر دو زاویوں کا مجموعہ °90 ہو تو وہ کمپلیمنٹری زاویے (*Complementary Angles*) کہلاتے ہیں۔ ہر ایک زاویہ دوسرے کا کمپلیمنٹ (*Complement*) کہلاتا ہے۔



مثلاً °30 اور °60 کے زاویے ایک دوسرے کے کمپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔

اس تصویر میں چونکہ $\angle 1 + \angle 2 = 90°$

اس لیے $\angle 1$ اور $\angle 2$ کمپلیمنٹری زاویے ہیں۔

7.3.15 سپلیمنٹری زاویے

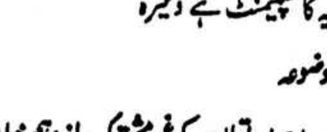
اگر دو زاویوں کا مجموعہ °180 ہے تو انہیں سپلیمنٹری زاویے (*Supplementary Angles*) کہا جاتا ہے۔ ان میں سے ہر ایک دوسرے کا سپلیمنٹ (*Supplement*) کہلاتا ہے۔

مثلاً °60 اور °120 کے زاویے یا °81 اور °99 کے زاویے سپلیمنٹری زاویے ہیں۔ °60 کا زاویہ °120 کے زاویہ کا سپلیمنٹ اور °120 کا زاویہ °60 کے زاویہ کا سپلیمنٹ ہے وغیرہ

اصول موضوعہ 12. سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ

(الف) اگر دو متصلہ زاویے سپلیمنٹری زاویے ہوں تو ان کے غیر مشترک بازو ہم خط ہوتے ہیں۔

(ب) اگر دو متصلہ زاویوں کے غیر مشترک بازو ہم خط ہوں تو وہ سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔



اوپر دی ہوئی شکل میں دو متصلہ زاویے $\angle AOC$ اور $\angle BOC$ سپلیمنٹری زاویے ہیں اس لیے ان کے غیر مشترک بازو $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ ہم خط ہیں یعنی ایک ہی خط پر واقع ہیں۔

اس کے برعکس اگر $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ ایک خط پر واقع ہوں تو

$$m\angle AOC + m\angle BOC = 180°$$

یعنی $\angle AOC$ اور $\angle BOC$ سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔

اس اصول موضوعہ کے مطابق اگر دو زاویے سپلیمنٹری ہوں تو ان کے غیر مشترک بازوں مخالف شعاعیں ہوتی ہیں۔

اوپر شکل میں $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ دو مخالف شعاعیں ہیں۔

7.3.16 قائمہ زاویہ

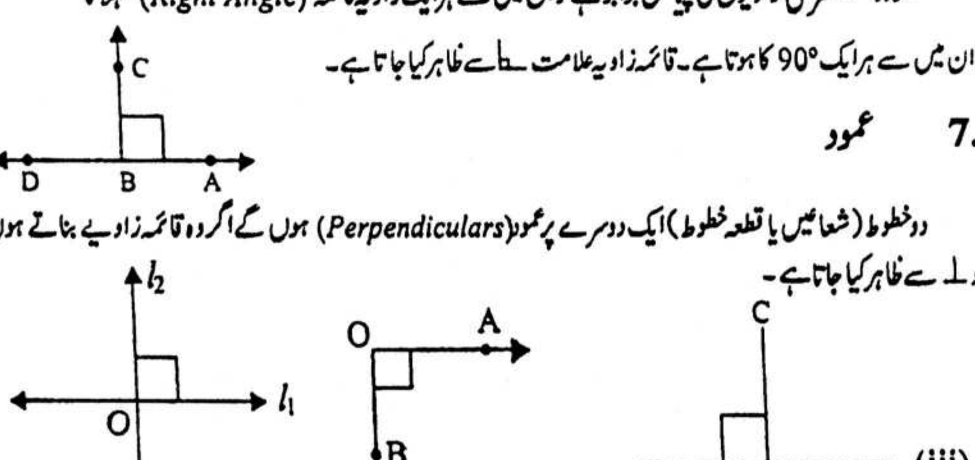
اگر دو کمپلیمنٹری زاویوں کی پیائش برابر ہے تو ان میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ (*Right Angle*) کہلاتا

یعنی ان میں سے ہر ایک $90°$ کا ہوتا ہے۔ قائمہ زاویہ علامت ∟ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

7.3.17 عمود

دو خطوط (شعاعیں یا قطعہ خطوط) ایک دوسرے پر عمود (*Perpendiculars*) ہوں گے اگر وہ قائمہ زاویے بناتے ہوں۔

عمود ⊥ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



شکل (i) میں نقطہ O پر $l_1 \perp l_2$ اور $l_2 \perp l_1$

شکل (ii) میں $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

شکل (iii)

میں $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, $\overline{CD} \perp \overline{DB}$, $\overline{DB} \perp \overline{CD}$, $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ اور $\overline{CD} \perp \overline{AD}$

اصول موضوعہ 13: کسی خط پر ایک نقطے سے یا خط کے باہر کسی نقطہ سے اس خط پر ایک اور صرف ایک عمود کھینچا جا سکتا ہے۔

7.3.18 زاویہ حادہ: وہ زاویہ جس کی پیائش $90°$ سے کم ہو حادہ زاویہ (*Acute angle*) کہلاتا ہے۔

7.3.19 زاویہ منفرجہ: وہ زاویہ جس کی پیائش $90°$ سے زیادہ ہو منفرجہ زاویہ (*Obtuse angle*) کہلاتا ہے۔

7.3.20 متماثل زاویے

دو زاویے جن کی پیائش ایک ہی ہو متماثل زاویے (*Congruent angles*) کہلاتے ہیں

متماثل کے لیے علامت $\cong$ استعمال ہوتی ہے

واضح ہو کہ $\angle ABC \cong \angle PQR$ اور $m\angle PQR = m\angle ABC$

آپس میں مترادف بیانات ہیں

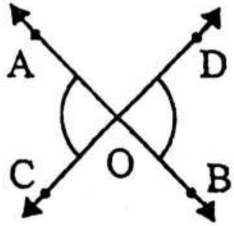
اوپر دی ہوئی تعریفوں سے مندرجہ ذیل نتائج آسانی سے اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

(i) ہر زاویہ اپنا متماثل ہوتا ہے (ایسے متماثل کو ذاتی تماثل کہتے ہیں)۔
(ii) تمام قائمہ زاویے متماثل زاویے ہوتے ہیں۔
(iii) اگر دو زاویے کمپلیمنٹری ہیں تو وہ حادہ زاویے ہوتے ہیں۔
(iv) متماثل زاویوں کے کمپلیمنٹ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
(v) متماثل زاویوں کے سپلیمنٹ متماثل ہوتے ہیں۔

7.3.21 راسی متقابلہ زاویے (*Vertically Opposite Angles*)

وہ زاویہ جن کے بازو مخالف شعاعوں کے دو جوڑے بناتے ہوں راسی متقابلہ زاویے (یا صرف راسی زاویے) کہلاتے ہیں۔

سامنے کی شکل میں $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ مخالف شعاعوں کا ایک جوڑا ہے (یعنی AB ایک خط ہے)



اور $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ مخالف شعاعوں کا ایک اور جوڑا ہے۔ (یعنی CD ایک خط ہے)

اس لیے $\angle AOC$ اور $\angle BOD$ راسی متقابلہ زاویے ہیں

اسی طرح $\angle AOD$ اور $\angle BOC$ راسی متقابلہ زاویے ہیں۔

مشق 7.1

1. مندرجہ ذیل اصطلاحات کی تعریف کیجیے اور شکل بنا کر اس کی وضاحت کیجیے۔

(i) قطعہ خط (ii) شعاع (iii) مخالف شعاعیں (iv) محدب سیٹ

(v) نصف مستوی اور اس کا کنارا (vi) زاویہ (vii) قائمہ زاویہ (viii) عمود

(ix) متماثل زاویے (x) متصلہ زاویے (xi) راسی متقابلہ زاویے

2. مندرجہ ذیل میں فرق واضح کیجیے اور شکلوں کے ذریعہ وضاحت کیجیے۔

(i) زاویہ کا اندرونہ اور بیرونہ (ii) ہم خط اور غیر ہم خط نقاط (iii) درمیان اور پرے

(iv) حادہ اور منفرجہ زاویے (v) کمپلیمنٹری اور سپلیمنٹری زاویے

3. استخراجی طریقہ استدلال سے آپ کیا مراد لیتے ہیں۔

4. استخراجی مضمون جیسے علم ہندسہ کی چار خصوصیات گنوائیے (مثال دینے کی ضرورت نہیں ہے)۔

5. بنیادمفروضے کیا ہیں؟ اس کی کتنی قسمیں ہیں؟ مثالیں دے کر واضح کیجیے۔

6. مندرجہ ذیل اصول موصوعات بیان کیجیے

(i) فاصلے کا موضوعہ (ii) مستوی کے بٹوارے کا موضوعہ (iii) زاویہ کی بناوٹ کا موضوعہ

(iv) زاویوں کی جمع کا موضوعہ (v) سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ

7- اگر نقطہ C نقاط A اور B کے درمیان واقع ہے تو ثابت کیجیے کہ

(i) $m\,\overline{AB} > m\,\overline{AC}$ (ii) $m\,\overline{BC} < m\,\overline{AB}$