یونٹ 8

اثباتی علم ہندسہ

8.1 خطوط اور کثیر الاضلاع سے متعلق مسائل

پچھلے یونٹ میں علم ہندسہ سے متعلق ہم بہت سی اصطلاحات سے متعارف ہوئے ہیں اور کئی اصول موضوعہ (بنیادی مفروضوں) کا مطالعہ بھی کیا ہے۔ اس لیے اب ہم کچھ بیانات (مسائل) ترتیب دینے کے لیے پوری طرح لیس ہیں جنھیں استخراجی طریقہ سے ثابت کیا جائے گا۔ مسائل کے ثبوت کے لیے مندرجہ ذیل چھ مراحل کا مطالعہ بہت ضروری ہے۔ جنھیں ثبوت کے حصے کہا جاتا ہے۔

1. مسئلے کا دعویٰ عام

یہ مسئلے کا عمومی بیان ہوتا ہے۔ عام طور پر اس کے دو حصے ہوتے ہیں۔

(i) قیاس یا شرط جو عموماً ''اگر'' سے شروع ہوتا ہے۔

(ii) نتیجہ جو عموماً ''تو'' سے شروع ہوتا ہے۔

مسئلہ: اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں تو راسی متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

یہاں قیاس ''اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں'' ہے۔ اور نتیجہ ''راسی متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں'' ہے۔

کبھی کبھی 'اگر' اور 'تو' یا ان میں سے کوئی ایک بھی استعمال نہیں ہوتا۔ مثلاً ''ایک مساوی الساقین مثلث کے دو زاویے متماثل ہوتے ہیں''۔

یا ''مساوی الساقین مثلث میں قاعدہ پر بننے والے زاویے متماثل ہوتے ہیں'' یہ دونوں مندرجہ ذیل بیان کا خلاصہ ہیں۔ ''اگر مثلث کے دو اضلاع متماثل ہوں تو ان کے مخالف زاویے متماثل ہوتے ہیں''۔

2. شکل

مسئلے کے دعویٰ عام کی روشنی میں ایسی شکل بنائی جاتی ہے جو نقاط، خطوط، زاویوں وغیرہ کو اس طرح اجاگر کرے کہ شرائط اور نتیجہ واضح ہو جائے۔

3. معلوم

بنائی گئی شکل کے اعتبار سے دعوٰی کے پہلے حصے یعنی قیاس کو بطور "معلوم" لکھ لیا جاتا ہے۔ یعنی "یہ بات ہمارے علم میں ہے"۔

4. مطلوب

بنائی گئی شکل کے اعتبار سے دعوٰی کے دوسرے حصے یعنی نتیجہ کو بطور "مطلوب" لکھ لیا جاتا ہے۔

5. عمل

کبھی کبھی مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے شکل میں اضافہ کیا جاتا ہے۔ مثلاً زاویہ کی تنصیف، دیئے ہوئے دو نقاط کو ملانا یا کسی ضلع کو بڑھانا وغیرہ اس طرح کے اقدام کو عمل یا بناوٹ کہا جاتا ہے۔ یہ عمل اختیاری ہے اگر ضرورت ہو تو اس کا ذکر کیا جاتا ہے عموماً تحلیلی طریقہ (جس کا ذکر اگلے آرٹیکل میں ہے) کی مدد سے تعین ہوتا ہے کہ کیا عمل ہونا چاہیئے۔

6. ثبوت

یہ کسی مسئلہ کے ثبوت کا آخری حصہ ہوتا ہے اس میں تعریفات اصول موضوعہ، دیا ہوا مواد اور معلوم حقائق (ایسے مسائل جو ثابت کیے جا چکے ہوں) کی مدد سے دیے ہوئے مفروضے کا منطقی ثبوت دیا جاتا ہے۔

ایک نتیجہ سے دوسرا نتیجہ اخذ کرنے کی وجوہات دینا لازمی ہوتا ہے۔ عموماً دو طریقوں سے ثبوت پیش کیے جاتے ہیں۔

(i) پہلے طریقہ میں یکے بعد دیگرے وجوہات دیتے رہتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ نتیجہ نکالتے رہتے ہیں۔

(ii) دوسرے طریقہ میں ایک کالم میں نتائج اور دوسرے کالم میں ہر نتیجہ کے سامنے اس کی دلیل دی جاتی ہے۔

اس کتاب میں ثبوت پیش کرنے کے لیے زیادہ تر دوسرا طریقہ اختیار کریں گے۔ پرانی روایت ہے کہ ثبوت کے اختتام پر فہوالمطلوب یعنی Q.E.D (*Quod Erat Demonstrandum*) لکھتے ہیں۔ جس کے معنیٰ ہیں "پس یہی ثابت کرنا تھا"۔

8.2 ثبوت کے طریقے

یہ عمومی مشاہدہ ہے کہ اساتذہ ثبوت کو تختہ سیاہ (یا سفید) پر نقل کر دیتے ہیں اور طلباء انھیں رٹ لیتے ہیں۔ اس کی وجہ سے علم ہندسہ کی تدریس کے مندرجہ ذیل دو بنیادی مقاصد فوت ہو جاتے ہیں۔

(i) منطقی طریقہ سے سوچنے کی صلاحیت میں اضافہ

(ii) غور و خوض یا دریافت یا تخلیقی صلاحیت کا پرورش پانا

کسی مسئلہ کو ثابت کرنے کیلئے طلباء کو یہ سمجھنا چاہئے کہ کس عمل یا منطقی استدلال کی ضرورت ہے۔ یہ اشد ضروری ہے۔ یہ بھی اہم ہے کہ مسئلے کے ثبوت کے لیئے ممکنہ مختلف طریقے اختیار کرنے میں طلباء کی ہمت افزائی کی جائے۔

اب ہم دو طریقہ، استدلال بیان کرتے ہیں جو مسئلوں کو ثابت کرنے میں استعمال ہوتے ہیں۔

1. تحلیلی وترکیبی طریقہ (Analytico - Synthetic Method)

تحلیل (Analysis) کے معنیٰ ہیں عناصر یا اجزاء کو علیحدہ علیحدہ کرنا۔ تحلیل "کیا ثابت کرنا ہے" سے شروع ہوتی ہے۔

فرض کیجیے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ بیان x صحیح ہے۔ ہم سوال پوچھتے ہیں کہ کیسے ثابت کر سکتے ہیں کہ x صحیح ہے؟ شاید جواب یہ ہے کہ "اسے ثابت کیا جاسکتا ہے اگر y صحیح ہے" پھر ہم پوچھتے ہیں کہ کیسے ثابت کر سکتے ہیں کہ y صحیح ہے؟ ہوسکتا ہے جواب یہ ہو کہ " اسے صحیح ثابت کیا جاسکتا ہے اگر بیان z صحیح ہو"

اب اگر یہ ثابت ہو جائے کہ z صحیح ہے تو گویا x بھی صحیح ہے۔

اس طرح کا استدلال اصل مسئلہ کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تحلیل کرنے میں مدد دیتا ہے اور یہ رہنمائی کرتا ہے کہ کیا کرنا ہے۔ اس تحلیل کے بعد ہم ترکیبی شکل میں جو کہ تحلیلی ترتیب کے الٹ ہے، ثبوت لکھتے ہیں۔ جیسے

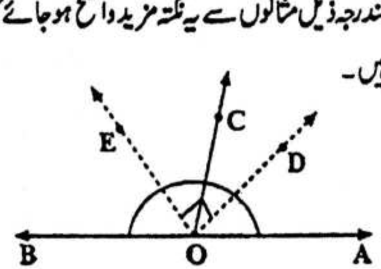
سب سے پہلے یہ ثابت کرتے ہیں کہ بیان z صحیح ہے۔

اس سے یہ ثابت کرتے ہیں بیان y صحیح ہے۔

اور پھر یہ ثابت کرتے ہیں کہ بیان x صحیح ہے۔

اس طرح کی تحلیل میں ممکن ہے تین سے زیادہ مراحل ہوں۔ مندرجہ ذیل مثالوں سے یہ نکتہ مزید واضح ہو جائے گا۔

مثال: دو متصلہ سپلیمنٹری زاویوں کے ناصف آپس میں عمود ہوتے ہیں۔



معلوم: $\overrightarrow{OD}$ اور $\overrightarrow{OE}$ بالترتیب دو سپلیمنٹری زاویوں $\angle AOC$ اور $\angle BOC$ کے ناصف ہیں۔

مطلوب: $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE}$

تحلیلی طریقہ (Analytic Method)

(1) ہم کیسے ثابت کر سکتے ہیں $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE}$؟

(a) ہم کہہ سکتے ہیں اگر $m\angle EOD = 90^\circ$ تو $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE}$

(2) ہم کیسے ثابت کر سکتے ہیں $m\angle EOD = 90^\circ$

(b) ہم کہہ سکتے ہیں اگر $m\angle COD + m\angle EOC = 90^\circ$ تو $m\angle EOD = 90^\circ$

(3) کیا ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $m\angle COD + m\angle EOC = 90^\circ$ ؟

(c) ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کیونکہ

ہمیں ملا ہوا ہے: $m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$ اس لیے ان کے نصف کا مجموعہ 90° ہوگا۔ یعنی

$$\frac{1}{2}m\angle AOC + \frac{1}{2}m\angle BOC = \frac{1}{2}(180^\circ)$$

یا

$$m\angle COD + m\angle EOC = 90^\circ$$

چونکہ تحلیل مکمل ہو چکی اب ہم ترکیبی شکل میں تحلیل کی الٹی ترتیب سے ثبوت لکھتے ہیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1. $m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$	1. معلوم (دو متصل سپلیمنٹری زاویے)
2. لہٰذا $\frac{1}{2}m\angle AOC + \frac{1}{2}m\angle BOC = \frac{1}{2}(180^\circ)$	2. مساوات کے دونوں اطراف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دیا
3. $m\angle COD + m\angle EOC = 90^\circ$	3. $\frac{1}{2}m\angle AOC = m\angle COD$ $\frac{1}{2}m\angle BOC = m\angle EOD$
4. $\therefore\ m\angle EOD = 90^\circ$	4. زاویوں کے جمع کا موضوعہ یعنی $m\angle COD + m\angle EOC = m\angle EOD$
5. پس $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE}$	5. اگر دو شعاعوں کے درمیان زاویہ قائمہ ہو تو وہ ایک دوسرے پر عمود ہوتی ہیں۔

فہوالمطلوب

نوٹ: نشانات $\therefore$ اور $\because$ سے مراد ہیں : لہٰذا اور چونکہ

مندرجہ بالا مثال سے واضح ہوتا ہے کہ تحلیل سے کسی مسئلے کے تجزیہ میں مدد ملتی ہے جس سے مسئلہ کے حل کرنے کے اقدامات کا اشارہ ملتا ہے۔ مگر ثبوت ہمیشہ ترکیبی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ لہٰذا اس طریقے کو تحلیلی و ترکیبی طریقہ کہتے ہیں۔

1. ثبوت میں تحلیل کی اہمیت

اگر تحلیل کے بغیر ہم ثبوت میں ترکیبی رجحان کو اپنائیں تو ہمیں کچھ حاصل نہیں ہوتا جبکہ تحلیلی رجحان ہمیں ان اقدامات کی طرف لے جاتا ہے جو ثبوت کو ترکیبی شکل میں لکھنے کے لیے ترتیب دیئے جاتے ہیں۔ مزید برآں تحلیلی رجحان غور و خوص اور تخلیقی رجحان کو پروان چڑھاتا ہے۔ جبکہ ترکیبی رجحان طلباء کو تعجب میں مبتلا کر دیتا ہے کہ فلاں قدم کیوں اٹھایا گیا۔ ثالثاً تحلیلی رجحان طلبا کو آزمائش کے ساتھ ساتھ فوری جانچ پر اکساتا ہے جبکہ ترکیبی رجحان انھیں ثبوت کو مرحلہ وار رکھنے کی طرف لے جاتا ہے۔

آرتھر شلز (Arthur Schultze) نے اپنی کتاب " ثانوی اسکولوں میں ریاضی کی تدریس" میں ان دو طریقوں کا موازنہ کرتے ہوئے یہ کہا ہے کہ تحلیل دریافت کرنے کا طریقہ ہے جبکہ ترکیب، خوبصورت اور مختصر پیش کرنے کا طریقہ ہے۔

آخر میں ایک اہم بات یہ ہے کہ ثبوت کو پیش کرنے کے لیے ترکیبی طرز طالب علم سے اس راہ کو پوشیدہ کر دیتا ہے۔ جسے اس نے دریافت کیا ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ تحلیلی و ترکیبی رجحان علم ہندسہ کے طالبعلم کے لیے ایک عطیہ ہے۔

2. طریقہء برہان الخلف (***Reductio-ad-Absurdum Method***)

طریقہء برہان الخلف اقلیدس کی کتاب "*Elements*" میں موجود ہے۔

اس طریقے میں ثبوت کا نمونہ مندرجہ ذیل ہے۔

(i) ہم اصول "p کا نتیجہ q ہے" ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

(ii) ہم کہتے ہیں 'q' صحیح ہے یا '$\overline{q}$' صحیح ہے" [$\overline{q}$ سے مراد ہے "q نہیں"]

(iii) ہم فرض کرتے ہیں کہ $\overline{q}$ صحیح ہے۔

(iv) ہم ثابت کرتے ہیں کہ $\overline{q}$ ہمراہ p ایک تضاد پیدا کرتا ہے۔

(v) اگر (iv) میں مذکورہ ثبوت فراہم کرنے میں ہم کامیاب ہو جائیں تو کہیں گے کہ q ہی حقیقی متبادل ہے۔

(vi) پس طریقہء برہان الخلف سے p کا نتیجہ q ہے۔

طریقہ برہان الخلف کی بنیاد قوانین ارسطو پر ہے، جنھیں ہم یوں بیان کر سکتے ہیں:

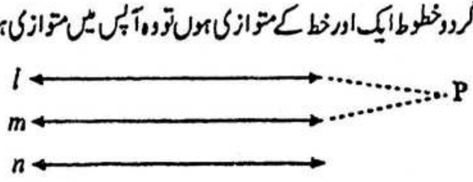
I جو ہے ، ہے (قانون ذاتی)

II کوئی چیز ہے یا نہیں ہے (قانون اخراج وسط)

III یہ ناممکن ہے کہ کوئی شے بیک وقت ہو بھی اور نہ بھی ہو۔ (قانون تضاد)

ذیل میں ایک مثال کے ذریعہ اوپر دیتے ہوئے قوانین اور ان کے استعمال کے طریقے کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال: اگر دو خطوط ایک اور خط کے متوازی ہوں تو وہ آپس میں متوازی ہوں گے۔



معلوم : $l \parallel m$ اور $m \parallel n$ ... (p)

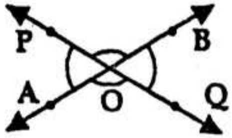
مطلوب: $l \parallel m$ ... (q)

ثبوت: فرض کیجیے خطوط l اور m متوازی نہیں ہیں ... ($\overline{q}$)
اس لیے ایک دوسرے کو کسی نقطہ (مثلاً P) پر قطع کریں گے۔
یوں دو قاطع خطوط l اور m ایک دوسرے خط n کے متوازی ہیں۔ جو پلے فیئر (Play fair's Axiom) کے اصول موضوعہ "دو قاطع خطوط کسی تیسرے خط کے متوازی نہیں ہو سکتے" کی ضد ہے۔
پس ہمارا مفروضہ مہمل ہے اس لیے غلط ہے۔
نتیجتاً یہ بیان کہ $l \parallel m$ صحیح ہے۔

فہوالمطلوب

مسئلہ 1

اگر دو خطوط قطع کریں تو راسی متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔



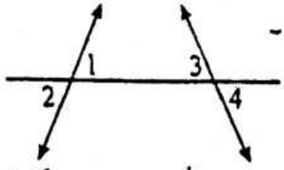
معلوم: دو خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{PQ}$ نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔
مطلوب: $\angle POB \cong \angle AOQ$ اور $\angle AOP \cong \angle BOQ$
ثبوت:

بیانات	دلائل
1. $m\angle POB + m\angle AOP = 180°$	1. دو متصلہ زاویوں کے غیر مشترک بازو $\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{OA}$ ہم خط ہیں۔ (سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ)
2. $m\angle AOP + m\angle AOQ = 180°$	2. دو متصلہ زاویوں کے غیر مشترک بازو ہم خط ہیں۔ (سپلیمنٹری زایوں کا موضوعہ)
3. $m\angle POB + m\angle AOP = m\angle AOP + m\angle AOQ$	3. مساوات کی متعدی خاصیت (دو مقداریں ایک ہی مقدار کے برابر ہیں یعنی 180°)
4. $m\angle POB = m\angle AOQ$	4. $m\angle AOP$ کی دونوں طرف تنسیخ کرنے سے
5. یا $\angle POB \cong \angle POQ$	5. اگر دو زاویے پیمائش میں برابر ہیں تو وہ متماثل ہیں۔
6. اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $\angle AOP \cong \angle BOQ$	6. مندرجہ بالا طریقہ سے

فہوالمطلوب

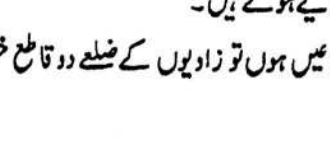
مشق 8.1

1. مسئلہ 1 میں دی ہوئی شکل میں اگر $m\angle BOQ = 70^\circ$ تو دوسرے زاویوں کی پیائش معلوم کیجیے۔

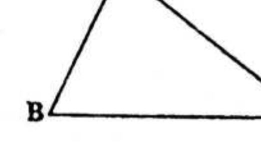


2. 30° پر قطع کرتے ہوئے دو خطوط کھینچیے اور بقیہ زاویوں کی پیائش معلوم کیجیے۔
3. اس شکل میں $\angle 3 \cong \angle 1$ تو
ثابت کیجیے کہ $\angle 4 \cong \angle 2$
4. چار شعاعوں کا سرا مشترک ہے۔ جب کہ متقابلہ زاویوں کے جوڑے آپس میں متماثل ہیں۔ ثابت کیجیے کہ یہ مخالف شعاعوں کے یہ دو اور صرف دو جوڑے ہیں (اور اس لیے قاطع خطوط ہیں) [عکس مسئلہ 1]
5. دو متصلہ سپلیمنٹری زایوں کے ناصف ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
6. اگر دو زاویوں کے ناصف ایک دوسرے پر عمود ہوں تو وہ زاویے سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔
7. اگر دو متماثل زاویوں جن کے راس مشترک ہوں کے ناصف دو مخالف شعاعیں ہوں تو زاویوں کے ضلعے دو قاطع خطوط ہوتے ہیں۔

8.3 مثلث یا تکون



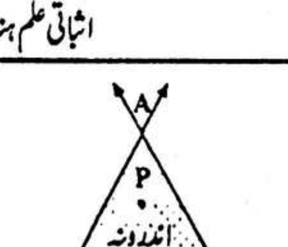
1. قطعۂ خطوط $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کا اتصال ایک مثلث (*Triangle*) ABC کہلاتا ہے جبکہ A ، B اور C غیرہم خط نقاط ہوں۔ مثلث ABC کو ΔABC لکھا جاتا ہے۔
2. نقاط A ، B اور C مثلث ABC کے راس کہلاتے ہیں۔
3. قطعہء خطوط $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ مثلث ABC کے اضلاع کہلاتے ہیں۔
4. ΔABC میں تین زاویے $\angle BAC$ ، $\angle ABC$ اور $\angle ACB$ ہوتے ہیں۔ انھیں ΔABC کے زاویے کہا جاتا ہے۔ انھیں بالترتیب $\angle A$ ، $\angle B$ اور $\angle C$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔



حالانکہ ایک مثلث میں تین زاویے ہوتے ہیں مگر یہ زاویے کلی طور پر مثلث کے اندر شامل نہیں ہوتے۔ ان زاویوں کو دکھانے کے لیے زاویوں کے بازو بڑھائے جاسکتے ہیں۔ مثلاً ΔABC میں $\angle A$ کو کلی طور پر دکھانے کے لیے اس کے بازو $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ بڑھائے گئے ہیں۔

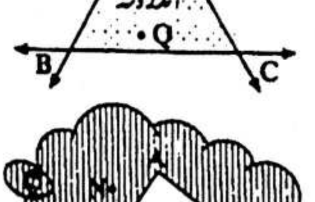
نقاط P ، Q ، R کو دیکھیے تینوں نقاط $\angle A$ کے اندرونے میں ہیں۔ لیکن نقاط Q اور R مثلث ABC کے اندرونے میں نہیں ہیں۔

5. مثلث کا اندرونہ



ان نقاط کا سیٹ جو مثلث کے تینوں زاویوں A∠، B∠ اور C∠ کے اندرونے میں ہوں مثلث کا اندرونہ (*Interior of a Triangle*) کہلاتا ہے۔ شکل کا نقطہ دار حصہ ABC∆ کا اندرونہ ہے۔ نقاط P اور Q دونوں A∠، B∠ اور C∠ کے اندرونے میں ہیں۔

6. مثلث کا بیرونہ

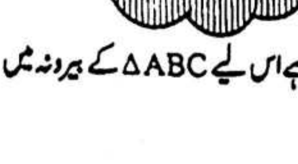


ان نقاط کا سیٹ جو نہ مثلث پر ہوں اور نہ اس کے اندرونہ میں ہوں وہ مثلث کا بیرونہ (*Exterior of a Triangle*) کہلاتے ہیں۔ اس شکل میں سایہ دار لامتناہی حصہ ABC∆ کا بیرونہ ہے۔ یہاں نقطہ M حالانکہ ABC∠ کے اندرونہ میں ہے مگر A∠ اور C∠ کے اندرونہ میں نہیں ہے اس لیے ABC∆ کے بیرونہ میں ہے۔ یہی معاملہ N اور O کے ساتھ ہے۔ جوکہ ABC∆ کے بیرونہ میں ہیں۔

7. مثلثی خطہ یا مثلثی رقبہ

مثلث اور اس کے اندرونہ کے اتصال کو مثلثی خِطہ یا مثلثی رقبہ (*Triangales Region or Area*) کہا جاتا ہے۔

8. اندرونی اور بیرونی زاویے

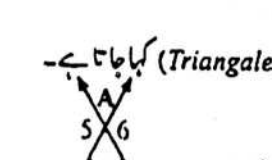


A∠، B∠ اور C∠ مثلث ABC کے اندرونی زاویے (*Interior Angles*) ہیں۔

ایسا زاویہ جو کسی اندرونی زاویے کا متصلہ اور سپلیمنٹری زاویہ ہو اسے مثلث کا بیرونی زاویہ (*Exterior Angle*) کہتے ہیں۔

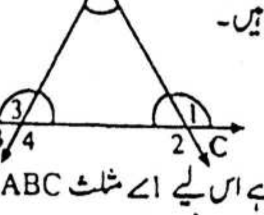
اس شکل میں 1∠ ، ACB∠ (C∠ اندرونی زاویہ) کا متصلہ اور سپلیمنٹری زاویہ ہے اس لیے 1∠ مثلث ABC کا بیرونی زاویہ ہے۔ اس طرح سے 2∠، 3∠، 4∠، 5∠، 6∠ مثلث ABC کے بیرونی زاویے ہیں۔

9. متقابلہ زاویے اور متقابلہ اضلاع



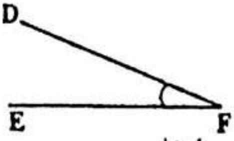
ABC∆ میں A∠ ، ضلع $\overline{BC}$ کے متقابل ہے۔ اور ضلع $\overline{BC}$ زاویہ A کے متقابل ہے۔ اسی طرح B∠ اور $\overline{AC}$ ایک دوسرے کے متقابل ہیں۔ اور C∠ اور $\overline{AB}$ ایک دوسرے کے متقابل ہیں۔

10. درمیانی زاویہ اور درمیانی ضلع



مثلث DEF میں D∠ ضلعوں $\overline{DE}$ اور $\overline{DF}$ کا درمیانی زاویہ ہے۔

E∠ ضلعوں $\overline{ED}$ اور $\overline{EF}$ کا درمیانی زاویہ ہے۔

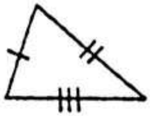


∠F ضلعوں $\overline{FE}$ اور $\overline{FD}$ کا درمیانی زاویہ ہے۔

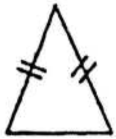
اس مثلث DEF میں $\overline{EF}$ زاویوں ∠E اور ∠F کا درمیانی ضلع ہے۔

اسی طرح $\overline{DE}$ درمیانی ضلع ہے ∠D اور ∠E کا اور ∠D اور ∠F کا $\overline{DF}$ درمیانی ضلع ہے۔

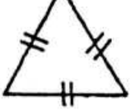
8.4 مثلث کی اقسام



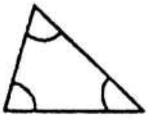
1. **مختلف الاضلاع مثلث :** ایسا مثلث جس کے تینوں اضلاع متماثل نہ ہوں، مختلف الاضلاع مثلث کہلاتا ہے۔



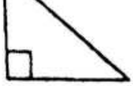
2. **متماثل الساقین مثلث :** ایسا مثلث جس کے دو اضلاع متماثل ہوں۔ متماثل الساقین مثلث کہلاتا ہے۔



3. **مساوی الاضلاع مثلث:** ایسا مثلث جس کے تینوں اضلاع متماثل ہوں۔ مساوی الاضلاع مثلث کہلاتا ہے۔



4. **حادۃ الزاویہ مثلث :** ایسا مثلث جس کے تینوں زاویے حادہ ہوں، حادۃ الزاویہ مثلث یا حادہ زاویہ مثلث کہلاتا ہے۔



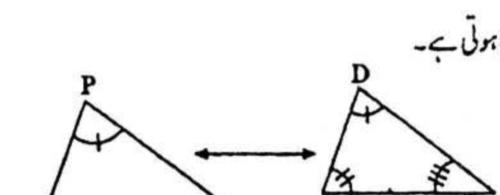
5. **قائمۃ الزاویہ مثلث:** ایسا مثلث جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو، قائمۃ الزاویہ مثلث یا قائمہ زاویہ مثلث کہلاتا ہے۔

6. **منفرجۃ الزاویہ مثلث:** ایسا مثلث جس کا ایک زاویہ منفرجہ ہو، منفرجۃ الزاویہ مثلث یا منفرجہ زاویہ مثلث کہلاتا ہے۔

8.5 دو مثلثوں یا دو کثیر الاضلاع میں ایک۔ایک مطابقت

ہر مثلث کے تین اضلاع، تین راس اور تین زاویے ہوتے ہیں۔اس لیے یہ ہمیشہ ممکن ہے کہ ان کے زاویوں، ضلعوں اور راس میں ایک۔ایک مطابقت قائم کی جائے۔

علامت " ⟷ " ایک۔ایک مطابقت کے لیے استعمال ہوتی ہے۔



$\Delta PQR \longleftrightarrow \Delta DEF$ کا مطلب ہے:

$P \longleftrightarrow D$ (نقطہ P نقطہ D سے مطابقت رکھتا ہے)

$Q \longleftrightarrow E$ اور $R \longleftrightarrow F$

پس $\angle P \longleftrightarrow \angle D$ ($\angle P$، $\angle D$ سے مطابقت رکھتا ہے)۔

$\angle Q \longleftrightarrow \angle E$ اور $\angle R \longleftrightarrow \angle F$

اسی طرح $\overline{PQ} \leftrightarrow \overline{DE}$ (ضلع $\overline{PQ}$ ضلع $\overline{DE}$ سے مطابقت رکھتا ہے)

$\overline{PR} \leftrightarrow \overline{DF}$ اور $\overline{QR} \leftrightarrow \overline{ER}$

دو مثلثوں ΔPQR اور ΔDEF میں چھ مختلف طریقوں سے مطابقت قائم کی جاسکتی ہے جو مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta DEF$ (ii) $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta DFE$ (iii) $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta EDF$

(iv) $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta EFD$ (v) $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta FDE$ (iv) $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta FED$

اسی طرح Q,P اور R کی ترتیب تبدیل کرتے ہوئے اور ΔDEF جوں کا توں رکھتے ہوئے یہی چھ مطابقتیں حاصل کی جاسکتی ہے۔ مثلاً $\Delta QPR \leftrightarrow \Delta EDF$ اور $\Delta PQR \leftrightarrow \Delta DEF$ ایک ہی مطابقت ہیں کیونکہ دونوں مطابقتوں میں نقطہ P نقطہ D سے Q ، E سے اور R ، F سے مطابقت رکھتا ہے۔

دو مثلثوں میں (1-1) مطابقت قائم کرنے کا آسان طریقہ یہ ہے کہ ایک مثلث کے دو راسوں کی مطابقت دوسرے کے دو راسوں سے قائم کی جائے تو تمام ضلعوں اور راسوں میں خود بہ خود مطابقت قائم ہو جائے گی۔

اسی طریقے سے دو چوکور یا مخمس یا مسدس وغیرہ میں بھی (1-1) مطابقت قائم کی جاسکتی ہے۔

8.6 مثلثوں کا تماثل (*Congruence of Triangles*)

دو مثلث متماثل کہلاتے ہیں اگر ان کے متناظرہ ضلعے اور زاویے متماثل ہوں مثلاً اگر ΔABC اور ΔPQR اس طرح ہوں کہ

(i) $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$

اور (ii) $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$ $\angle C \cong \angle R$ یعنی متناظرہ زاویے متماثل ہیں اور

(iii) $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$ اور $\overline{AC} \cong \overline{PR}$ یعنی متناظرہ ضلعے متماثل ہیں۔

تو مثلث متماثل ہیں اور علامت میں لکھا جاتا ہے: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ اور ہم کہتے ہیں $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ ایک تماثل ہے۔

نوٹ 1. اگر دو مثلثوں کی ایک مطابقت متماثل ہو تو یہ ضروری نہیں کی کوئی دوسری مطابقت بھی تماثل ہو۔

نوٹ 2. ہر مثلث خود اپنا متماثل ہوتا ہے۔ اس تماثل کو مثلثوں کا ذاتی تماثل (*Identity Congruence*) کہتے ہیں۔

مثلاً $\Delta ABC \cong \Delta ABC$

نوٹ 3. $\Delta ABC \cong \Delta PQR \Rightarrow \Delta PQR \cong \Delta ABC$ (تماثل کی خاصیت تشاکل)

نوٹ 4. اگر $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ اور $\Delta DEF \cong \Delta PQR$ تو $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (تماثل کی خاصیت متعدیت)

نوٹ 5. اگر دو مثلثیں متماثل ہوں تو ان کے متناظرہ زاویے اور ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔

8.7 دیگر کثیر الاضلاع میں تماثل

دو کثیر الاضلاع متماثل کہلاتے ہیں اگر ان کے متناظرہ زاویے اور ضلعے متماثل ہوں۔ مثلاً اگر PQRS چوکور $\cong$ ABCD چوکور

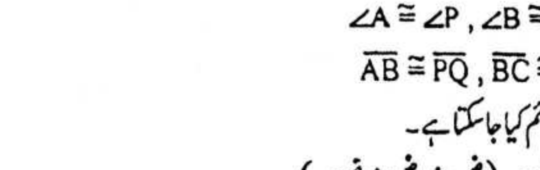
تو $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$, $\angle D \cong \angle S$

اور $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$, $\overline{CD} \cong \overline{RS}$, $\overline{DA} \cong \overline{SP}$

اس طریقہ سے دو مخمس یا مسدس وغیرہ میں تماثل قائم کیا جا سکتا ہے۔

8.8 اصول موضوعہ 14: ضلع - زاویہ - ضلع موضوعہ (ض-ز-ض موضوعہ)

اگر دو مثلثوں کی دی ہوئی مطابقت میں ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ اور ان سے مطابقت رکھنے والی دوسری مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ متماثل ہوں تو مثلثیں متماثل ہوں گی۔

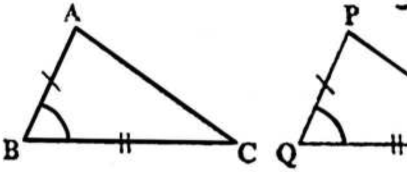


$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ میں

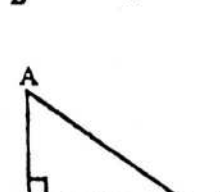
اگر $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\angle B \cong \angle Q$ اور $\overline{BC} \cong \overline{QR}$

تو $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

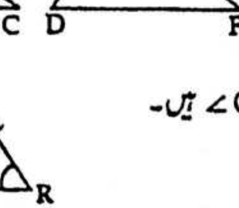
مشق 8.2



1. مثلثوں ABC اور DEF کی تمام چھ مطابقتیں تحریر کیجیے۔
اور وہ مطابقت بتائیے جو تماثل ہو۔



2. دیئے ہوئے متماثل الساقین مثلث میں $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ اور $\angle R \cong \angle Q$ ہیں۔
کون سی مطابقتیں ذاتی تماثل ہیں تحریر کیجیے۔



3. متصلہ شکل میں $\overline{PQ}$ اور $\overline{RS}$ کا وسطی نقطہ O ہے ثابت کیجیے کہ
$\overline{PR} \cong \overline{QS}$ اور $\angle P \cong \angle Q$ [اشارہ: اصول موضوعہ ض۔ز۔ض
کی مدد سے ثابت کیجیے کہ $\Delta POR \cong \Delta QOS$]

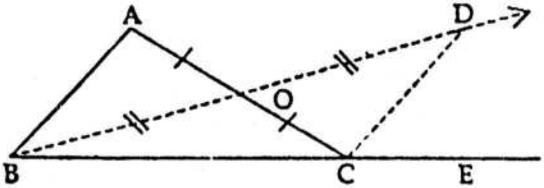
4. ایک متماثل الساقین مثلث میں زاویہ راس (متماثل الاضلاع کا درمیانی زاویہ) کا ناصف تیسرے ضلعے (قاعدہ) کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔

5. ثابت کیجیے کہ اگر ایک مثلث کا ارتفاع قاعدہ کی تنصیف کرتا ہے تو مثلث متماثل الساقین ہے (سوال 4 کا عکس)۔

6. ثابت کیجیے کہ ایک مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 2

اگر ایک مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جائے تو اس طرح بننے والا بیرونی زاویہ پیمائش میں متقابلہ اندرونی زاویوں میں سے ہر ایک سے بڑا ہوتا ہے۔



معلوم: ΔABC جس میں $\angle ACE$ بیرونی زاویہ ہے۔

مطلوب: $m\angle ACE > m\angle A$ اور $m\angle ACE > m\angle B$

عمل: فرض کیا $\overline{AC}$ کا وسطی نقطہ O ہے $\overrightarrow{BO}$ کھینچیے اور نقطہ D تک بڑھائیے۔
اس طرح کہ $\overline{BO} \cong \overline{OD}$ ، اب D کو C سے ملائیے۔

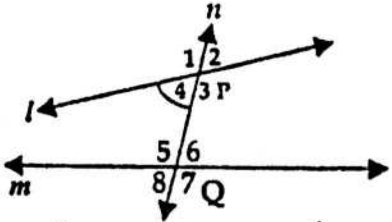
ثبوت:

بیانات	دلائل
1. $\Delta AOB \leftrightarrow \Delta COD$ میں	1.
(i) $\overline{AO} \cong \overline{CO}$	(i) عمل
(ii) $\angle AOB \cong \angle COD$	(ii) راسی زاویے (مسئلہ 1)
(iii) $\overline{BO} \cong \overline{DO}$	(iii) عمل
2. $\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$	2. ض۔ز۔ض موضوعہ
3. $\therefore m\angle A = m\angle OCD$	3. مثلثوں کے تماثل کی رو سے
4. لیکن $m\angle ACE = m\angle OCD + m\angle DCE$	4. زاویوں کی جمع کا موضوعہ
5. $\therefore m\angle ACE > m\angle OCD$	5. کل جز سے بڑا ہوتا ہے
6. $\therefore m\angle ACE > m\angle A$	6. $m\angle OCD = m\angle A$ (3 کی رو سے)
7. اسی طرح $m\angle ACE > m\angle B$	7. مندرجہ بالا طریقے سے

فہو المطلوب

نتیجہ صریح 1. اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ قائمہ ہو تو باقی دو زاویے حادہ ہوں گے۔

نتیجہ صریح 2. کسی نقطہ سے جو خط پر نہ ہو ایک اور صرف ایک عمود کھینچا جا سکتا ہے۔ (اصول موضوعہ 13)



8.9 خط قاطع، اندرونی اور بیرونی زاویے

دی ہوئی شکل میں خط n خط قاطع (*Transversal*) کہلاتا ہے۔ جو دو خطوط l اور m کو بالترتیب P اور Q پر قطع کرتا ہے اور یوں آٹھ زاویے بناتا ہے۔

دونوں نقطۂ تقاطع P اور Q، $\angle 4$ کے ایک بازو پر واقع ہیں ایسے زاویے کو اندرونی زاویہ (*Interior Angles*) کہا جاتا ہے۔ اسی طرح $\angle 3$، $\angle 5$، $\angle 6$ بھی اندرونی زاویے ہیں۔ اس کے برخلاف $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 7$، $\angle 8$ بیرونی زاویے (*Exterior Angles*) ہیں اس لیے کہ ان کے کسی بھی بازو پر صرف ایک نقطۂ تقاطع واقع ہے۔

مزید یہ کہ $\angle 8$، $\angle 5$، $\angle 4$، $\angle 1$ خط قاطع n کے ایک ہی طرف ہیں۔ جبکہ $\angle 7$، $\angle 6$، $\angle 3$، $\angle 2$ دوسری طرف ہیں۔

8.10 متبادلہ اندرونی زاویے

دو ایسے اندرونی زاویے جن کے:

(i) راس مختلف ہوں

(ii) اندرونے خط قاطع کے مخالف اطراف میں ہوں۔

متبادلہ اندرونی زاویے، یا صرف متبادلہ زاویے (*Alternate Interior Angles*) کہلاتے ہیں۔ مثلاً $\angle 3$ اور $\angle 5$، $\angle 4$ اور $\angle 6$ متبادلہ زاویوں کے جوڑے ہیں۔

8.11 متناظرہ زاویے

دو ایسے اندرونی زاویے جن کے:

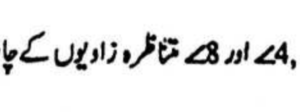
(i) راس مختلف ہوں

(ii) اندرونے خط قاطع کے ایک ہی طرف ہوں۔

(iii) ان میں ایک اندرونی اور دوسرا بیرونی زاویہ ہو۔

متناظرہ زاویے کہلاتے ہیں۔ مثلاً $\angle 1$ اور $\angle 5$، $\angle 2$ اور $\angle 6$، $\angle 3$ اور $\angle 7$، $\angle 4$ اور $\angle 8$ متناظرہ زاویوں کے چار جوڑے ہیں۔

8.12 متوازی خطوط



دو خطوط متوازی کہلاتے ہیں اگر

(i) وہ ہم مستوی ہوں

(ii) ایک دوسرے کو قطع نہ کرتے ہوں

متوازی خطوط '||' سے ظاہر کیے جاتے ہیں۔ $l \parallel m$ سے مراد l اور m متوازی ہیں۔

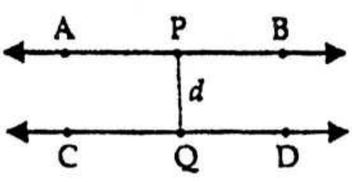
نوٹ:

1. اگر دو خطوط ایک ہی مستوی میں واقع ہوں تو وہ ایک دوسرے کو قطع کریں گے یا وہ قطع نہیں کریں گے اگر وہ قطع نہ کریں تو وہ متوازی ہوں گے۔

2. اگر دو غیر متوازی خطوط مختلف مستویوں میں واقع ہوں اور قطع نہ کرتے ہوں تو وہ منحرف خطوط (Skew Lines) کہلاتے ہیں

3. قطعہ خطوط یا شعاعیں اگر متوازی خطوط پر واقع ہوں تو متوازی ہوں گے۔

4. اگر $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ تو ایک خط کے کسی نقطہ سے دوسرے خط تک کا عمودی فاصلہ متوازی خطوط کا درمیانی فاصلہ کہلاتا ہے۔

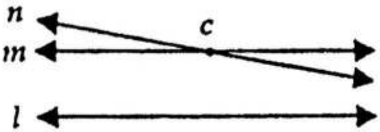


5. کسی بھی نقطے پر متوازی خطوط کا درمیانی فاصلہ یکساں ہوتا ہے۔

8.13 اصولِ موضوعہ 15: متوازی خطوط کا موضوعہ

کسی خط سے باہر کسی نقطہ سے اس کے متوازی صرف اور صرف ایک ہی خط کھینچا جا سکتا ہے۔

اس اصول موضوعہ کو یوں بھی بیان کیا جاتا ہے۔

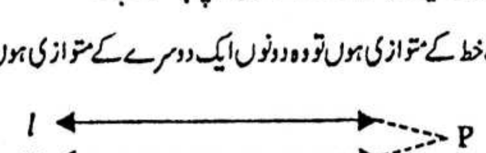


''دو متقاطع خطوط ایک ہی خط کے متوازی نہیں ہو سکتے'' (پلے فیئر کا موضوعہ)

اوپر دی ہوئی شکل میں اگر $l \parallel n$ تو m, l کے متوازی نہیں ہو سکتا اور اگر $l \parallel m$ تو خط n خط l کے متوازی نہیں ہو سکتا۔

یا دونوں متوازی نہیں ہوتے یعنی کسی بیرونی نقطہ C سے صرف ایک ہی خط l کے متوازی کھینچا جا سکتا ہے۔

اب ثابت کرتے ہیں کہ: اگر دو خطوط کسی تیسرے خط کے متوازی ہوں تو وہ دونوں ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے۔



معلوم: $l \parallel n$ اور $m \parallel n$

مطلوب: $l \parallel m$

ثبوت: اگر l اور m متوازی نہیں ہیں تو فرض کیا وہ نقطہ P پر قطع کریں گے۔

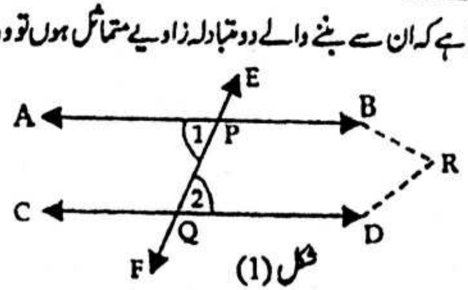
اس طرح دو متقاطع خطوط l اور m ایک تیسرے خط n کے متوازی ہیں جو کہ پلے فیئر کے موضوعہ خلاف ہے۔ اس لیے یہ مفروضہ کہ l اور m قطع کرتے ہیں غلط ہے۔

پس $l \parallel m$

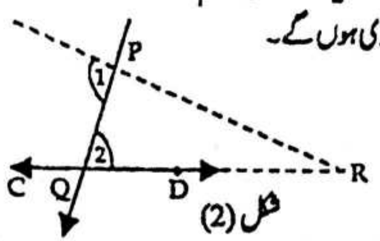
فہو المطلوب

مسئلہ 3

اگر ایک خط قاطع دو ہم مستوی خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ ان سے بننے والے دو متبادلہ زاویے متماثل ہوں تو وہ دونوں خطوط متوازی ہوں گے۔



شکل (1)



شکل (2)

معلوم: $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ دو ہم مستوی خطوط ہیں اور خط قاطع $\overleftrightarrow{EF}$ ان کو بالترتیب نقاط P اور Q پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ $\angle 2 \cong \angle 1$

مطلوب: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

ثبوت: اگر $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ متوازی نہیں ہیں تو چونکہ ہم مستوی ہیں یقیناً کسی نقطہ (فرض کیا R پر) قطع کریں گے۔
اور PQR ایک مثلث بنے گا جیسا کہ شکل 2 میں دکھایا گیا ہے۔

بیانات	دلائل
1. ΔPQR میں $\angle 1$ بیرونی زاویہ ہے اور $\angle 2$ متقابلہ اندرونی زاویہ ہے	1. تعریف کی رو سے
2. $\therefore\ m\angle 1 > m\angle 2$	2. مسئلہ 2
3. لیکن $m\angle 1 = m\angle 2$	3. معلوم
4. بیان 2 اور 3 بیک وقت درست نہیں ہو سکتے۔	4. خاصیتِ ثلاثی
5. پس $m\angle 1 = m\angle 2$ صحیح ہے اور $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ قطع نہیں کرتے	5. مفروضہ غلط ہے۔
6. اس لیے $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	6. کیونکہ خطوط ہم مستوی ہیں اور قطع نہیں کرتے۔

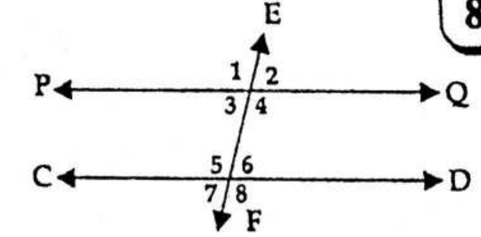
فہو المطلوب

نتیجہ صریح 1. اگر ایک خط قاطع دو ہم مستوی خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ متناظرہ زاویوں کے جوڑے متماثل ہیں تو دونوں خطوط متوازی ہیں۔

نتیجہ صریح 2. اگر ایک خط قاطع دو ہم مستوی خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ خط قاطع کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوں تو وہ خطوط متوازی ہیں۔

نتیجہ صریح 3. ایک مستوی میں اگر ایک خط دو خطوط پر عمود ہے تو دونوں خطوط متوازی ہیں۔

مشق 8.3



.1 کیا $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ہے؟ اگر:

(i) $m\angle 3 = 70^\circ$ اور $m\angle 6 = 70^\circ$

(ii) $m\angle 4 = 100^\circ$ اور $m\angle 5 = 100^\circ$

(iii) $m\angle 1 = 110^\circ$ اور $m\angle 5 = 110^\circ$

(iv) $m\angle 4 = 120^\circ$ اور $m\angle 6 = 60^\circ$

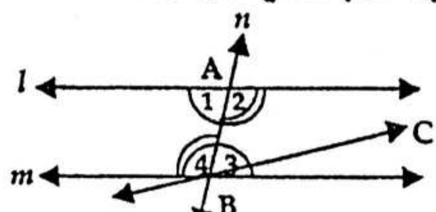
.2 اگر قطعہ خطوط $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک دوسرے کی تنصیف اپنے نقطہ تقاطع پر کرتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ اور $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

.3 ΔABC میں نقاط D اور E بالترتیب $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کے وسطی نقاط ہیں اگر $\overline{DE}$ کو F تک اس طرح بڑھایا جائے کہ $\overline{EF} \cong \overline{ED}$ تو ثابت کیجیے کہ $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$ اور $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

مسئلہ 4

(مسئلہ 3 کا عکس)

اگر ایک خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو اس طرح بننے والے متبادلہ زاویے متماثل ہوں گے۔



معلوم: $l \parallel m$ اور خط n ان کو بالترتیب نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔

مطلوب: $\angle 1 \cong \angle 3$ اور $\angle 2 \cong \angle 4$

ثبوت: فرض کیا $\angle 1 \ncong \angle 3$ لیکن $\angle 1 \cong \angle ABC$ جبکہ $\overleftrightarrow{BC}$, m پر واقع نہیں ہے۔

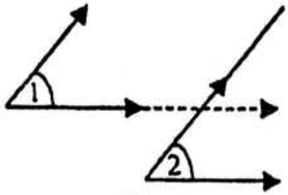
بیانات	دلائل
.1 چونکہ $\angle 1 \cong \angle ABC$	.1 مفروضہ
.2 $\therefore\ l \parallel \overleftrightarrow{BC}$	.2 $\angle 1$ اور $\angle ABC$ متماثل ہیں (مسئلہ 3)
.3 لیکن $l \parallel m$	.3 معلوم
.4 پس l دو متقاطع خطوط m اور $\overleftrightarrow{BC}$ کے متوازی ہے جو ناممکن ہے۔	.4 پلے فیئر کا موضوعہ
.5 $\therefore\ \angle 1 \cong \angle 3$	.5 یہ مفروضہ کہ $\angle 1 \cong \angle ABC$ مہمل نتیجہ دیتا ہے
.6 اسی طرح $\angle 2 \cong \angle 4$	.6 مندرجہ بالا طریقہ سے فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 1. اگر خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہو تو متناظرہ زاویوں کا ہر جوڑا متماثل ہوتا ہے۔

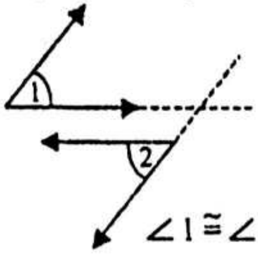
نتیجہ صریح 2. اگر دو متوازی خطوط کو ایک خط قاطع قطع کرتا ہے تو خط قاطع کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 3. ایک مستوی میں اگر کوئی خط دو متوازی خطوط میں سے کسی ایک پر عمود ہو تو وہ دوسرے خط پر بھی عمود ہوگا۔

نتیجہ صریح 4. ایک مستوی میں اگر ایک زاویے کے دونوں بازو دوسرے زاویے کے دونوں بازوؤں کے متوازی ہوں اس طرح کہ (I) سمت ایک ہی ہو (II) یا سمت مخالف ہو تو زاویے متماثل ہوں گے۔

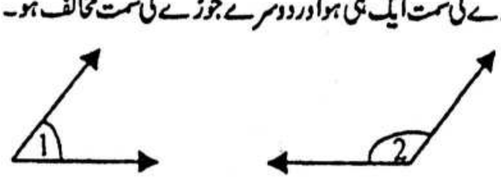


$\angle 1 \cong \angle 2$



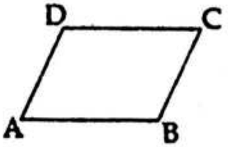
$\angle 1 \cong \angle 2$

نتیجہ صریح 5. ایک مستوی میں دو زاویے سپلیمنٹری ہوں گے اگر ایک زاویے کے بازو دوسرے زاویے کے بازوؤں کے اس طرح متوازی ہوں کہ بازوؤں کے ایک جوڑے کی سمت ایک ہی ہو اور دوسرے جوڑے کی سمت مخالف ہو۔



$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$

8.14 متوازی الاضلاع



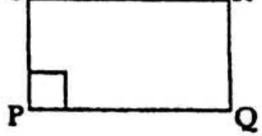
ایک چوکور جس کے مخالف ضلعے متوازی ہوں متوازی الاضلاع (*Parallelogram*) کہلاتا ہے۔ اسے ‴|| سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ سامنے شکل میں ABCD ایک ‴|| ہے۔

متوازی الاضلاع کی اقسام

1. مستطیل

ایسا متوازی الاضلاع جس میں کم از کم ایک زاویہ قائمہ ہو مستطیل (*Rectangle*) کہلاتا ہے۔

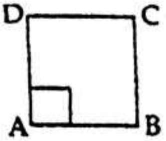
PQRS ایک مستطیل ہے۔



نوٹ: اگر متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہو تو اس کے تمام زاویے قائمہ ہوں گے۔

(دیکھیے نتیجہ صریح 3)

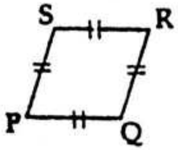
.2 مربع

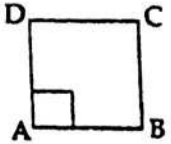


ایک مستطیل جس کے متصلہ اضلاع متماثل ہوں مربع (*Square*) کہلاتا ہے۔

ABCD ایک مربع ہے۔

.3 معیّن



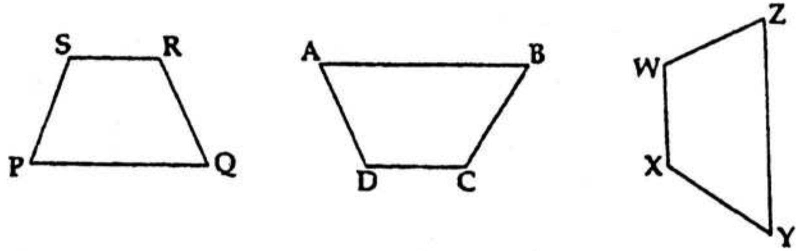


ایک متوازی الاضلاع جس کے متصلہ ضلعے متماثل ہوں معیّن (*Rhombus*) کہلاتا ہے۔ PQSR اور ABCD دونوں معیّن ہیں۔

8.15 ذوزنقہ

ایک چوکور جس کے مخالف ضلعوں کا صرف ایک جوڑا متوازی ہو ذوزنقہ (*Trapezoid*) کہلاتا ہے۔

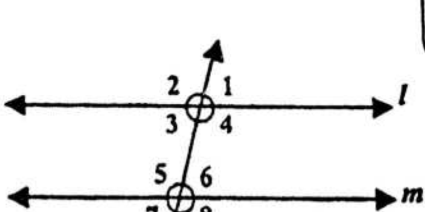
ABCD , PQRS اور WXYZ ذوزنقہ ہیں۔



ایسی ذوزنقہ جس میں دونوں غیر متوازی اضلاع متماثل ہوں، متماثل الساقین ذوزنقہ (*Iscsceles Trapezoid*) کہلاتی ہے۔

PQSR متماثل الساقین ذوزنقہ ہے۔

مشق 8.4



.1 اگر $l \parallel m$ ، $m\angle 1 = 60°$ تو بقیہ زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔

.2 ΔABC کا ضلع $\overline{BC}$ نقطہ D تک بڑھایا گیا اور $\overline{CE}$, $\overline{AB}$ کے متوازی کھینچا گیا ہے۔

تو ثابت کیجیے کہ $m\angle A = m\angle ACE$; $m\angle B = m\angle ECD$

$m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

.3 اگر خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہو تو متبادلہ اندرونی زاویوں کے ناصف متوازی ہوتے ہیں۔

.4 اگر خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہو تو متناظرہ زاویوں کے کسی ایک جوڑے کے ناصف متوازی ہوتے ہیں۔

5. ایک خط قاطع اگر دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہو تو خط قاطع کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویوں کے ناصف ایک دوسرے سے قائمہ زاویے بناتے ہیں۔

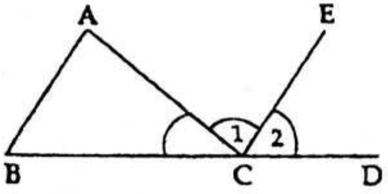
6. ایک متماثل الساقین مثلث کے قاعدے کے متوازی اگر ایک خط کھینچا جائے تو وہ اندرونی زاویے جو یہ متماثل خطوط سے بنائے گا، متماثل ہوں گے۔

7. اگر ایک مثلث کے کسی ایک راس کے بیرونی زاویے کا ناصف قاعدے کے متوازی ہو تو مثلث متماثل الساقین ہوگی۔

8. ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع کے متقابل زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ (اشارہ: نتیجہ صرح 2 استعمال کیجیے)۔

مسئلہ 5

کسی مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ °180 ہوتا ہے۔



معلوم: ΔABC

مطلوب: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

عمل: $\overrightarrow{BC}$ کو D تک بڑھائیے $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$ کھینچیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1. $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ خط قاطع ہے۔	1. عمل
2. $\therefore m\angle A = m\angle 1$	2. متوازی خطوط کے متبادلہ زاویے
3. $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$ ، $\overline{BD}$ خط قاطع ہے۔	3. عمل
4. $m\angle B = m\angle 2$	4. متوازی خطوط کے متناظر زاویے
5. $\therefore m\angle A + m\angle B = m\angle 1 + m\angle 2$	5. مساوات کی جمعی خاصیت
6. دونوں طرف $m\angle ACB$ جمع کرنے پر $m\angle A + m\angle B + m\angle ACB = m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle ACB$	6. مساوات کی جمعی خاصیت
7. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle ACD + m\angle ACB$	7. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle ACD$
8. $\therefore m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$	8. $m\angle ACD + m\angle ACB = 180^\circ$ (سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ)

فہو المطلوب

نتیجہ صریح 1. ایک مثلث میں صرف ایک زاویہ قائمہ یا صرف ایک زاویہ منفرجہ ہوسکتا ہے۔

نتیجہ صریح 2. ہر مثلث میں کم از کم دو زاویہ حادہ ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 3. ایک قائمہ زاویہ مثلث میں حادہ زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 4. کسی دیے ہوئے خط پر ایسے نقطہ سے جو خط پر نہ ہو ایک اور صرف ایک عمود کھینچا جا سکتا ہے۔ (اصول موضوعہ 13)

نتیجہ صریح 5. کسی مثلث کے بیرونی زاویہ کی مقدار غیر متصلہ اندرونی زاویوں کی مجموعی مقدار کے برابر ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح 6. اگر ایک مثلث کے دو زاویے کسی دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے متماثل ہوں تو تیسرا زاویہ دوسرے مثلث کے تیسرے زاویے کے متماثل ہوگا۔

مشق 8.5

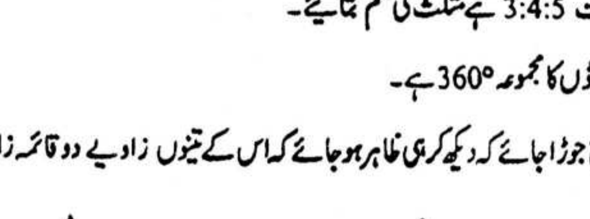
1. اگر ایک مثلث کے زاویوں کی پیمائش میں نسبت 1:2:3 ہے۔ ثابت کیجیے کہ یہ قائمہ زاویہ مثلث ہے۔

2. ایک مثلث کے زاویوں کی پیمائش میں نسبت 3:4:5 ہے مثلث کی قسم بتائیے۔

3. ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $360°$ ہے۔

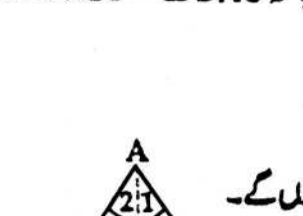
4. ایک مثلث کو ٹکڑوں میں کاٹ کر کس طرح جوڑا جائے کہ دیکھ کر ہی ظاہر ہو جائے کہ اس کے تینوں زاویے دو قائمہ زاویوں کے برابر ہیں۔

[اشارہ: ایک راستہ یہ بھی ہوسکتا ہے:]



5. ΔABC میں $\angle A$ قائمہ زاویہ ہے۔ $\overline{AD}$ ضلع $\overline{BC}$ پر عمود ہے ثابت کیجیے کہ $\angle ABD \cong \angle DAC$ اور $\angle BAD \cong \angle ACD$

مسئلہ 6



اگر کسی مثلث کے دو اضلاع متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ زاویے بھی متماثل ہوں گے۔

معلوم: ΔABC میں $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

مطلوب: $\angle B \cong \angle C$

عمل: $\angle A$ کا ناصف $\overline{AD}$ کھینچیے جو $\overline{BC}$ سے D پر ملتا ہے۔

ثبوت:

دلائل	بیانات
.1	.1 $\Delta ADB \leftrightarrow \Delta ADC$ میں
(i) معلوم	(i) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
(ii) عمل	(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$
(iii) مشترک (ذاتی تماثل)	(iii) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$
.2 ض۔ز۔ض موضوعہ	.2 اس لیے $\Delta ABD \cong \Delta ADC$
.3 مثلثوں کے تماثل کی وجہ سے	.3 $\therefore m\angle B = m\angle C$

فہوالمطلوب

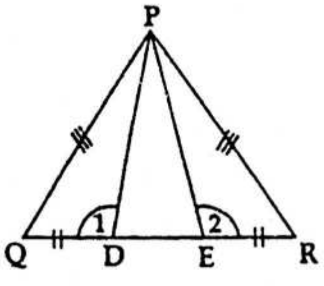
نتیجہ صریح 1. ایک مساوی الاضلاع مثلث مساوی الزوایہ مثلث ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح 2. کسی متماثل الساقین مثلث میں راس کے زاویے کا ناصف قاعدہ کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔

نوٹ: اس مسئلے کو اسطرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

"متماثل الساقین مثلث میں قاعدے کے زاویے متماثل ہوتے ہیں"۔

مشق 8.6



.1 مثلث ΔPQR میں

$\overline{QD} \cong \overline{RE}$ اور $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$

ثابت کیجیے:

(i) $\overline{PD} \cong \overline{PE}$ (ii) $\angle 1 \cong \angle 2$

وسطانیہ: کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطے اور اس کے مخالف راس کو ملانے والے قطعہ خط کو وسطانیہ کہتے ہیں۔

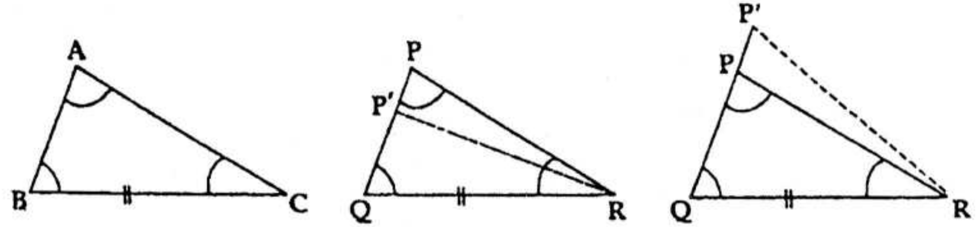
.2 متماثل الساقین میں مثلث کے متماثل ضلعوں کے وسطایے متماثل ہوتے ہیں۔

.3 ثابت کیجیے کہ مساوی الاضلاع مثلث کے وسطایے متماثل ہوتے ہیں۔

.4 متماثل الساقین مثلث میں ایک راس کے زاویے کا ناصف قاعدہ کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔

مسئلہ 7

دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور کوئی دو زاویے ان کے مطابق دوسرے مثلث کے ایک ضلع اور دو زاویوں کے متماثل ہوں تو دونوں مثلثیں متماثل ہوں گی۔



معلوم: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ میں

$\overline{BC} \cong \overline{QR}$ ، $\angle A \cong \angle P$ اور $\angle B \cong \angle Q$

مطلوب: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

ثبوت:

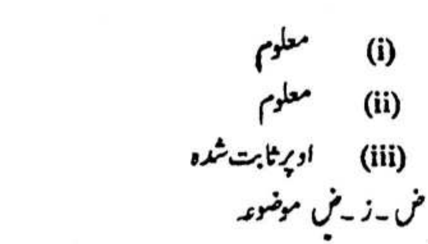
بیانات	دلائل
.1 $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$	.1
(i) $\angle A \cong \angle P$	(i) معلوم
(ii) $\angle B \cong \angle Q$	(ii) معلوم
.2 $\therefore \angle C \cong \angle R$	.2 مسئلہ 5 نتیجہ صریح 6
.3 اگر $\overline{BA} \ncong \overline{QP}$ تو $\overline{QP}$ کو بڑھایا یا $\overline{QP}$ پر ایک نقطہ P' اس طرح لیا کہ $\overline{QP'} \cong \overline{BA}$	.3 مفروضہ
.4 $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta P'QR$ میں	.4
(i) $\overline{BC} \cong \overline{QR}$	(i) معلوم
(ii) $\angle B \cong \angle Q$	(ii) معلوم
(iii) $\overline{BA} \cong \overline{QP'}$	(iii) مفروضہ
.5 $\therefore \Delta ABC \cong \Delta P'QR$	.5 ض۔ز۔ض موضوعہ
.6 $\therefore \angle C \cong \angle QRP'$	.6 مثلثوں کا تماثل

بیانات		دلائل	
.7	لیکن $\angle QRP \cong \angle C$	.7	(2) میں اوپر ثابت شدہ
.8	$\angle QRP' \cong \angle QRP$	.8	تماثل کی خاصیت متعدیت
.9	یہ اسی وقت ممکن ہے جب نقاط P' اور P منطبق ہوں اور $\overline{RP'} \cong \overline{RP}$	.9	زاویہ کی بناوٹ کا موضوعہ
.10	پس $\overline{BA} \cong \overline{QP}$	.10	جیسا کہ P اور P' منطبق ہیں۔
.11	$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ میں	.11	
	(i) $\overline{BC} \cong \overline{QR}$		(i) معلوم
	(ii) $\angle B \cong \angle Q$		(ii) معلوم
	(iii) $\overline{BA} \cong \overline{QP}$		(iii) اوپر ثابت شدہ
.12	$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$	.12	ض۔ز۔ض موضوعہ

فہوالمطلوب

نوٹ: اس مسئلہ کا مختصر احوالہ یہ ہے۔ ض۔ز۔ز ≅ ض۔ز۔ز یا ز۔ض۔ز ≅ ز۔ض۔ز یا ز۔ز۔ض ≅ ز۔ز۔ض

مشق 8.7



1. دی ہوئی شکل میں $\angle 4 \cong \angle 1$ ، $\angle 3 \cong \angle 2$ ، $\overline{AE} \cong \overline{CF}$

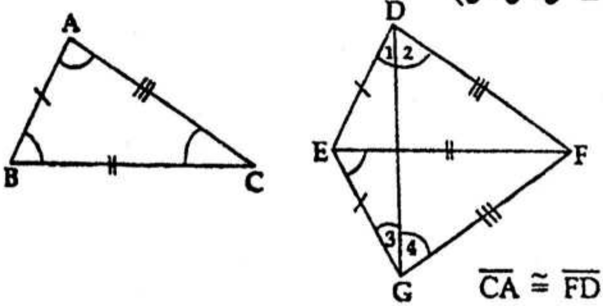
ثابت کیجیے: $\overline{DE} \cong \overline{BF}$

اور $\overline{AD} \cong \overline{CB}$

2. اگر کسی مثلث کے ایک زاویہ کا ناصف قاعدہ پر عمود ہو تو ثابت کیجیے کہ مثلث متماثل الساقین ہے۔
3. دو قطعہ خطوط ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ ان کے سروں کو ملانے والے قطعہ خطوط متماثل ہوں گے۔
4. ثابت کیجیے کہ متماثل الساقین مثلث کے راس کے زاویہ کا ناصف قاعدہ کا عمودی ناصف ہے۔ (سوال 2 کا عکس)
5. ثابت کیجیے کہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف کا ہر نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہے۔
6. ثابت کیجیے مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 8

دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع ان کے مطابق دوسری مثلث کے تینوں متناضرہ اضلاع باہم متماثل ہوں تو مثلثیں متماثل ہوں گی۔ (ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض)



معلوم: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ اور $\overline{CA} \cong \overline{FD}$

مطلوب: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

عمل: فرض کیجیے ΔABC میں ضلع $\overline{BC}$ تینوں ضلعوں میں سب سے بڑا ہے۔ ΔGEF اس طرح بنائیے کہ

(i) نقطہ G نقطہ D کے مخالف سمت میں ہو۔

(ii) $\angle FEG \cong \angle B$

(iii) $\overline{EG} \cong \overline{BA}$

G اور D کو ملائیے۔

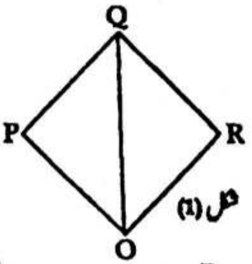
ثبوت:

بیانات	دلائل
1. $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta GEF$ میں	1.
(i) $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	(i) معلوم
(ii) $\angle B \cong \angle GEF$	(ii) عمل
(iii) $\overline{BA} \cong \overline{GE}$	(iii) عمل
2. $\therefore \Delta ABC \cong \Delta GEF$	2. اصول موضوعہ ض۔ز۔ض
3. اس لیے $\angle A \cong \angle G$ اور $\overline{AC} \cong \overline{GF}$	3. مثلثوں کا تماثل
4. لیکن $\overline{DF} \cong \overline{AC}$	4. معلوم
5. $\therefore \overline{GF} \cong \overline{DF}$	5. خاصیت متعدیت
6. ΔDEG میں $\therefore m\angle 1 = m\angle 3$	6. متقابلہ ضلعے متماثل (مسئلہ 6) یعنی $\overline{EG} \cong \overline{BA} \cong \overline{ED}$

بیانات	دلائل
7. اسی طرح ΔGFD میں $m\angle 2 = m\angle 4$	7. $\overline{DF} \cong \overline{GF}$ (مسئلہ 6)
8. $\therefore m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	8. مساواتوں کی جمعی خاصیت
9. $m\angle D = m\angle G$ یا	9. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle D$ $m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle G$
10. لیکن $m\angle G = m\angle A$	10. (3) میں ثابت شدہ
11. $\therefore m\angle A = m\angle D$	11. خاصیت متعدیت
12. $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں	12.
(i) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	(i) معلوم
(ii) $\angle A \cong \angle D$	(ii) ثابت شدہ
(iii) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	(iii) معلوم
13. $\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$	13. ض ۔ ز ۔ ض موضوعہ

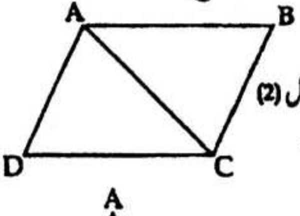
فہوالمطلوب

مشق 8.8



شکل (1)

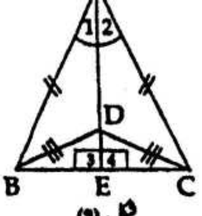
1. شکل (1) میں $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$ اور $\overline{OP} \cong \overline{OR}$ ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ
   (i) $\angle P \cong \angle R$
   (ii) $\angle PQO \cong \angle RQO$
   (iii) $\angle POQ \cong \angle ROQ$



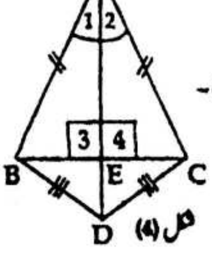
شکل (2)

2. شکل (2) میں $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ اور $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ
   $\angle B \cong \angle D$ اور $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

3. اشکال (3) اور (4) میں $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ
   $\overline{AD}$ نقطہ E پر $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف ہے۔
   [اشارہ : ثابت کیجیے $\angle 1 \cong \angle 2$
   پھر ثابت کیجیے کہ $\angle 3 \cong \angle 4$ اور سپلیمنٹری زاویے ہیں۔
   یوں ہر ایک زاویہ قائمہ ہے]



شکل (3)



شکل (4)

.4 دو متماثل الساقین مثلثوں، جن کا قاعدہ مشترک ہو، کے راسوں کو ملانے والا خط قاعدہ کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔

.5 متماثل الساقین مثلث کے قاعدے کی تنصیف کرنے والا وسطانیہ اس کے راس کے زاویے کا ناصف اور قاعدہ پر عمود ہوتا ہے۔

.6 ایک نقطہ جو کسی دیئے ہوئے قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو وہ قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے۔

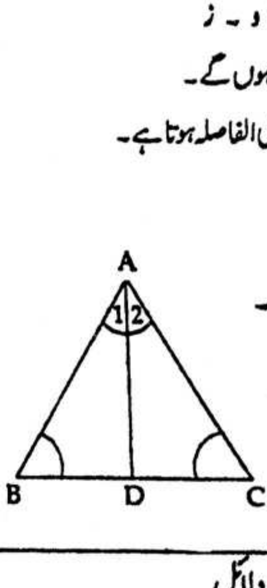
.7 اگر ایک قائمہ زاویہ مثلث کا وتر اور ایک حادہ زاویہ دوسری قائمہ زاویہ مثلث کے وتر اور ایک حادہ زاویہ کے متماثل ہو تو دونوں مثلثیں متماثل ہوں گی۔

نوٹ : اس کا حوالہ یوں دیا جائے گا وتر ۔ زاویہ ≅ وتر ۔ زاویہ یا مختصراً و ۔ ز ≅ و ۔ ز

.8 ایک زاویہ کے ناصف کے کسی نقطہ سے اس کے بازوؤں پر عمود کھینچے جائیں تو وہ متماثل ہوں گے۔

.9 کسی مثلث کے دو زاویوں کے ناصفوں کا نقطہ تقاطع اس کے تینوں اضلاع سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

مسئلہ 9



اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ اضلاع بھی متماثل ہوں گے۔

معلوم : مثلث ΔABC میں $\angle B \cong \angle C$

مطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

عمل: زاویہ A کا ناصف $\overline{AD}$ کھینچیے جو $\overline{BC}$ کو نقطہ D پر قطع کرے۔

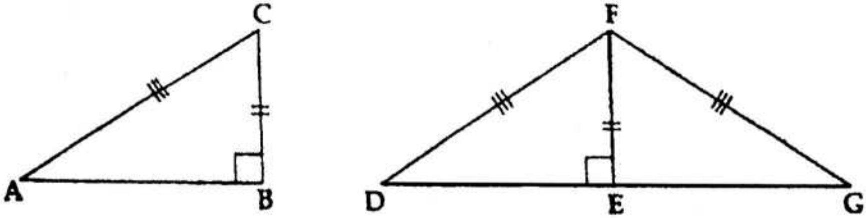
ثبوت:

بیانات	دلائل
.1 $\Delta ABD \leftrightarrow \Delta ACD$ میں	.1
(i) $\angle B \cong \angle C$	(i) معلوم
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) عمل
(iii) $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	(iii) مشترک
.2 $\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$	.2 ز۔ز۔ض ≅ ز۔ز۔ض
.3 $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	.3 مثلثوں کا متماثل

فہو المطلوب

مسئلہ 10

اگر دو قائمہ زاویہ مثلثوں کی کسی مطابقت میں ان کے وتر متماثل ہوں اور ایک مثلث کا ایک ضلع اس کے مطابق دوسری مثلث کے ایک ضلع کے متماثل ہو تو مثلثیں متماثل ہوں گی۔ (قائمہ زاویہ مثلثوں میں و۔ض ≅ و۔ض)



معلوم : قائمہ زاویہ مثلثوں میں: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$

$\angle B \cong \angle E$ (قائمہ زاویے) ، $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (وتر) اور $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

مطلوب: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

عمل: $\overline{DE}$ کو G تک اس طرح بڑھایئے کہ $\overline{EG} \cong \overline{AB}$ ، نقاط G اور F کو ملایئے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
.1 $m\angle DEF + m\angle GEF = 180^\circ$	.1 دو متصلہ سپلیمنٹری زاویے
.2 لیکن $m\angle DEF = 90^\circ$	.2 معلوم
.3 $\therefore m\angle GEF = 90^\circ$	.3 $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
.4 $\Delta GEF \leftrightarrow \Delta ABC$ میں	.4
(i) $\overline{GE} \cong \overline{AB}$	(i) عمل
(ii) $\angle GEF \cong \angle ABC$	(ii) ہرایک قائمہ ہے
(iii) $\overline{EF} \cong \overline{BC}$	(iii) معلوم
.5 پس $\therefore \Delta GEF \cong \Delta ABC$	.5 ض ۔ ز ۔ ض ≅ ض ۔ ز ۔ ض
.6 اس لیے $\angle G \cong \angle A$ اور $\overline{FG} \cong \overline{AC}$	.6 مثلثوں کا تماثل
.7 $\therefore \overline{FG} \cong \overline{DF}$	.7 چونکہ $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (معلوم)
.8 مثلث ΔDFG میں $\angle G \cong \angle D$	.8 متقابلہ ضلعے متماثل ہیں۔
.9 $\therefore \angle D \cong \angle A$	.9 ہرایک $\angle G$ کے برابر ہے۔

.10 $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں	.10
(i) $\angle A \cong \angle D$	(i) ثابت شدہ
(ii) $\angle ABC \cong \angle DEF$	(ii) قائمہ زاویے
(iii) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	(iii) معلوم
.11 اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	.11 ز ۔ ز ۔ ض $\cong$ ز ۔ ز ۔ ض

فہوالمطلوب

مشق 8.9

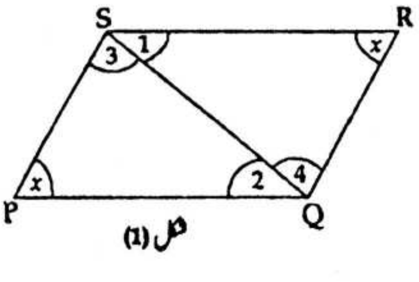
1. زاویہ کے ناصف پر واقع کوئی نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

ارتفاع: کسی مثلث کے کسی راس سے مخالف ضلع پر کھینچے جانے والا عمود ارتفاع کہلاتا ہے۔

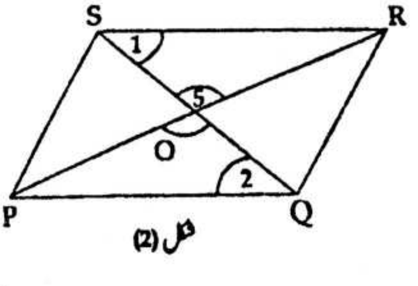
2. اگر ایک مثلث کے دو ارتفاع متماثل ہوں تو مثلث متماثل الساقین ہوگی۔
3. اگر ایک مثلث کے تینوں ارتفاع متماثل ہوں تو مثلث مساوی الاضلاع ہوگی۔
4. وہ نقطہ جو کسی زاویے کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو اس زاویہ کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔ (سوال 1 کا عکس)
5. مثلث کے اندرونے کا ایک ایسا نقطہ جو تینوں اضلاع سے مساوی الفاصلہ ہو مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصفوں پر واقع ہوتا ہے۔
6. اگر کسی مثلث کے ایک راس کے زاویہ کا ناصف قاعدہ کی تنصیف کرتا ہے تو مثلث متماثل الساقین ہے۔
7. متوازی الاضلاع کا وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔
8. متوازی الاضلاع میں متقابلہ اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔
9. متوازی الاضلاع میں متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
10. متوازی الاضلاع میں ایک ہی طرف کے دو اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

مسئلہ 11

متوازی الاضلاع کے متقابلہ زاویے اور اضلاع متماثل ہوتے ہیں اور وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔



شکل (1)



شکل (2)

معلوم: $\|^{m}$ PQRS

مطلوب: (i) $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{PS} \cong \overline{QR}$ (ii) $\angle P \cong \angle R$, $\angle S \cong \angle Q$

(iii) دونوں وتر $\overline{PR}$ اور $\overline{SQ}$ ایک دوسرے کی نقطہ O پر تنصیف کرتے ہیں۔

عمل: شکل (1) میں نقاط Q اور S ملائیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
.1 شکل (1) میں $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$ ، $\overline{SQ}$ خط قاطع ہے۔ لہٰذا $m\angle 1 = m\angle 2$	.1 متوازی خطوط کے متبادلہ زاویے (مسئلہ 4)
.2 اسی طرح $m\angle 3 = m\angle 4$	.2 $\overline{SP} \parallel \overline{RQ}$ ، $\overline{SQ}$ خط قاطع ہے۔
.3 لہٰذا $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 4$	.3 مساواتوں کی جمعی خاصیت
.4 یا $m\angle PSR = m\angle PQR$	.4 زاویوں کی جمع کا موضوعہ
.5 $\Delta SPQ \leftrightarrow \Delta QRS$ میں	.5
(i) $\angle 1 \cong \angle 2$	(i) اوپر (1) میں ثابت شدہ
(ii) $\overline{SQ} \cong \overline{SQ}$	(ii) مشترک
(iii) $\angle 3 \cong \angle 4$	(iii) اوپر (2) میں ثابت شدہ
.6 پس $\Delta SPQ \cong \Delta QRS$	.6 ز۔ض۔ز $\cong$ ز۔ض۔ز (مسئلہ 7)
.7 پس $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ ، $\overline{PS} \cong \overline{QR}$ اور $\angle P \cong \angle R$	.7 اس لیے کہ مثلثیں متماثل ہیں۔
.8 مزید یہ کہ $\angle S \cong \angle Q$ یعنی کہ متقابلہ زاویے اور ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔ اب شکل (2) میں	.8 اوپر (4) میں ثابت شدہ
.9 $\Delta POQ \leftrightarrow \Delta ROS$ میں	.9
(i) $m\angle 2 = m\angle 1$	(i) اوپر (1) میں ثابت شدہ
(ii) $\angle POQ \cong \angle SOR$	(ii) راسی زاویے (مسئلہ 1)
(iii) $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$	(iii) اوپر (7) میں ثابت کیا گیا۔
.10 پس $\Delta POQ \cong \Delta ROS$	.10 ز۔ز۔ض $\cong$ ز۔ز۔ض (مسئلہ 7)

11. لہٰذا $\overline{PO} \cong \overline{OR}$ اور $\overline{OQ} \cong \overline{OS}$ $\therefore$	**11.** مثلثوں کا تماثل
12. پس وتر $\overline{PR}$ اور $\overline{RS}$ ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔	**12.** چونکہ O ہر وتر کا وسطی نقطہ ہے۔

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح: ایک $||^m$ کا ہر وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تنصیف کرتا ہے۔
[یہ اوپر (5) اور (6) میں ثابت کیا گیا ہے]۔

مشق 8.10

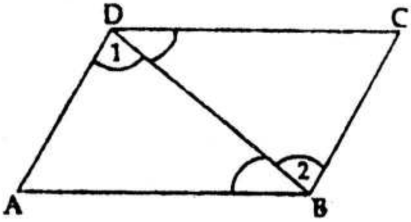
1. ثابت کیجیے کہ ایک متوازی الاضلاع میں ایک طرف کے دونوں اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔
2. ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع کے کسی ایک ضلع کے ساتھ بننے والے زاویوں کے ناصف ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
3. اگر کسی چوکور کے متقابلہ اضلاع کے دونوں جوڑے متماثل ہوں تو ثابت کیجیے کہ چوکور ایک متوازی الاضلاع ۔
4. ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے وتر باہم تنصیف کریں تو وہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔
5. ثابت کیجیے کہ اگر کسی چوکور کے ہر ضلع کے ساتھ بننے والے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہے۔
6. ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے متقابلہ زاویے متماثل ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہے۔
7. ثابت کیجیے کہ مستطیل کے دونوں وتر متماثل ہوتے ہیں۔
8. ثابت کیجیے کہ مربع کے وتر اس کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔
9. ثابت کیجیے کہ مربع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
10. اگر کسی چوکور کے وتر متماثل اور ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوں تو وہ مربع ہے۔
11. ثابت کیجیے کہ
   (i) معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں
   (ii) معین کے وتر اس کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

متماثل الساقین ذوزنقہ۔ اگر کسی ذوزنقہ کے غیر متوازی اضلاع متماثل ہوں تو اسے متماثل الساقین ذوزنقہ کہتے ہیں۔

12. ثابت کیجیے کہ متماثل الساقین ذوزنقہ میں قاعدہ کے ساتھ بننے والے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 8

اگر کسی چوکور کے متقابلہ ضلعوں کا ایک جوڑا متماثل و متوازی ہو تو یہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔



معلوم: چوکور ABCD میں $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

اور $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

مطلوب: چوکور ABCD ایک $\parallel^m$ ہے۔

عمل: نقاط B اور D کو ملائیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
.1 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $\overline{BD}$ خط قاطع ہے۔ $\therefore \angle ABD \cong \angle CDB$	.1 متوازی خطوط کے متبادلہ زاویے (مسئلہ 4)
.2 لہذا $\Delta ADB \leftrightarrow \Delta CBD$ میں $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (i) $\angle ABD \cong \angle CDB$ (ii) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (iii)	.2 (i) معلوم (ii) اوپر (1) میں ثابت کیا گیا (iii) مشترک
.3 $\therefore \Delta ADB \cong \Delta CBD$	.3 ض۔ز۔ض $\cong$ ض۔ز۔ض
.4 $\therefore \angle 1 \cong \angle 2$	.4 مثلثوں کا تماثل
.5 لیکن یہ متبادلہ زاویے ہیں	.5 متبادل زاویوں کی تعریف کی رو سے
.6 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	.6 متبادلہ زاویے متماثل ہیں (مسئلہ 3)
.7 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	.7 معلوم
.8 ABCD ایک $\parallel^m$ ہے	.8 متقابلہ اضلاع متوازی ہیں۔

فہوالمطلوب

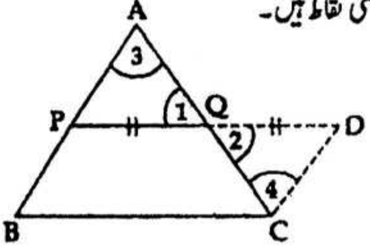
مشق 8.11

.1 اگر متوازی الاضلاع ABCD کے ضلعوں $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ اور $\overline{DA}$ پر چار نقاط S. R. Q. P بالترتیب اس طرح لیے گئے ہیں کہ $\overline{AP} \cong \overline{BQ} \cong \overline{CR} \cong \overline{DS}$ تو ثابت کیجیے کہ PQRS ایک $\parallel^m$ ہے۔

2. کسی $\|^{\text{m}}$ میں دو متقابلہ ضلعوں کے وسطی نقاط کو ملانے والا خط دیگر اضلاع کے متوازی ہوتا ہے۔
3. اگر کسی $\|^{\text{m}}$ کے دو متصلہ اضلاع متماثل ہوں تو وہ معین ہے۔
4. کسی متوازی الاضلاع کے زاویوں کے ناصف ایک مستطیل کا احاطہ کرتے ہیں۔
5. اگر کسی چوکور کے زاویوں کے ناصف ایک مستطیل کا احاطہ کرتے ہیں تو یہ $\|^{\text{m}}$ ہے۔

مسئلہ 13

کسی مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی اور لمبائی میں اس کا نصف ہوتا ہے۔



معلوم: مثلث ΔABC میں P اور Q بالترتیب $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کے وسطی نقاط ہیں۔
$\overline{PQ}$ ان کو ملانے والا قطعہ خط ہے۔

مطلوب: $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ اور $m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$

عمل: $\overrightarrow{PQ}$ کو D تک اس طرح بڑھایئے کہ $\overline{QD} \cong \overline{PQ}$
نقاط C اور D کو ملایئے۔

ثبوت:

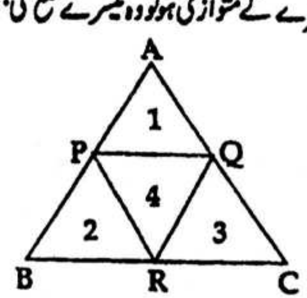
بیانات	دلائل
1. $\Delta APQ \leftrightarrow \Delta CDQ$ میں	1.
(i) $\overline{PQ} \cong \overline{QD}$	(i) عمل
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) راسی زاویے
(iii) $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$	(iii) معلوم
2. $APQ \cong \Delta CDQ$	2. اصول موضوعہ ض۔ز۔ض
3. $\overline{AP} \cong \overline{CD}$ اور $\angle 4 \cong \angle 3$	3. مثلثوں کا تماثل
4. لیکن $\overline{PB} \cong \overline{AP}$	4. معلوم
5. $\overline{PB} \cong \overline{CD}$	5. اس لیے کہ ان میں سے ہر ایک $\overline{AP}$ کے متماثل ہے۔
6. $\angle 3$ اور $\angle 4$ متبادلہ زاویے ہیں۔	6. متبادلہ زاویے کی تعریف کے اعتبار سے
7. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ یعنی $\overline{PB} \parallel \overline{CD}$	7. متبادلہ زاویے متماثل ہیں۔
8. PBCD ایک $\|^{\text{m}}$ ہے	8. متقابلہ ضلعوں کا ایک جوڑا $\|$ بھی ہے اور $\cong$ بھی

.9 لہٰذا $\overline{PD} \parallel \overline{BC}$ اور $\overline{PD} \cong \overline{BC}$	.9 "|| کے متقابل ضلعے || اور $\cong$ ہوتے ہیں۔
.10 پس $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ اور $m\overline{PQ} = \frac{1}{2}\, m\overline{BC}$	.10 اس لیے کہ $\overline{PD}$ اور $\overline{PQ}$ ایک ہی خط ہے۔ اور $m\overline{PQ} = \frac{1}{2}\, m\overline{PD}$

فہوالمطلوب

مشق 8.12

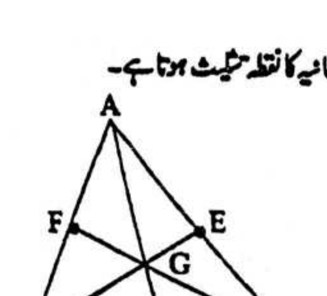
1. ثابت کیجیے کہ اگر ایک قطعہ خط کسی مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرتا ہو اور دوسرے کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کرے گا۔ (مسئلہ 13 کا عکس)



2. ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے تینوں ضلعوں کے وسطی نقاط کو ملانے سے جو چار مثلث بنتے ہیں ان میں سے ہر ایک دوسرے کے متماثل ہوتا ہے۔
3. ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ترتیب وار ملانے سے "|| بن جاتا ہے۔
4. ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے متقابلہ اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خطوط ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
5. کسی قائمہ زاویہ مثلث کے وتر کا وسطی نقطہ تینوں راسوں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

مسئلہ 14

مثلث کے وسطانیے ایک ہی نقطے سے گزرتے ہیں اور یہ نقطہ ہر وسطانیہ کا نقطہ تثلیث ہوتا ہے۔



معلوم: مثلث ABC میں وسطانیہ $\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ نقطہ G پر قطع کرتے ہیں۔

مطلوب: (i) $\overline{AG}$ کو بڑھایا جو کہ $\overline{BC}$ کو D پر تنصیف کرتا ہے۔ اور

(ii) G ہر وسطانیہ کا نقطہ تثلیث ہے۔

عمل: $\overline{CH}$ متوازی $\overline{EB}$ کھینچیے جو $\overline{AD}$ کو بڑھانے سے H پر ملتا ہے۔

نقاط B اور H کو ملائیے۔

ثبوت:

بیانات		دلائل	
.1	ΔACH میں $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ اور $\overline{EG} \parallel \overline{CH}$	.1	معلوم عمل
.2	$\overline{AG} \cong \overline{GH}$	.2	مسئلہ 13 کا عکس
.3	ΔABH میں $\overline{AG} \cong \overline{GH}$ $\overline{AF} \cong \overline{FB}$	.3	 اوپر (2) میں ثابت کیا گیا معلوم
.4	$\overline{FG} \parallel \overline{BH}$	.4	مسئلہ 13 کی رو سے
.5	پس BGCH ایک $\parallel^m$ ہے	.5	متقابلہ اضلاع متوازی ہیں
.6	وتر $\overline{BC}$ اور $\overline{GH}$ ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔ یعنی $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ ، $\overline{GD} \cong \overline{DH}$	.6	مسئلہ 11 کے اعتبار سے
.7	$\overline{AD}$ مثلث ABC کا وسطانیہ ہے	.7	$\overline{BD} \cong \overline{DC}$ اوپر ثابت کیا گیا
.8	$m\overline{AG} = m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$	.8	$\overline{GD} \cong \overline{DH} \Rightarrow m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$
.9	پس G خط $\overline{AD}$ کا نقطہ تثلیث ہے	.9	کیونکہ $\overline{AG}$ ، $\overline{GD}$ کا دگنا ہے
.10	اس طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ G $\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ کا بھی نقطہ تثلیث ہے	.10	مندرجہ بالا طریقہ سے

فہوالمطلوب

مشق 8.13

.1 اگر ABC میں وسطانیے $\overline{BC}$ اور $\overline{CF}$ متماثل ہوں تو ثابت کیجیے کہ $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ [اشارہ: اس کے حل کے لیے یہ ثابت کیجیے کہ $\angle CBE \cong \angle BCF$ وغیرہ]

.2 اگر کسی مثلث کے تینوں وسطانیے متماثل ہوں تو ثابت کیجیے کہ مثلث مساوی الاضلاع ہے۔

تعریفات:

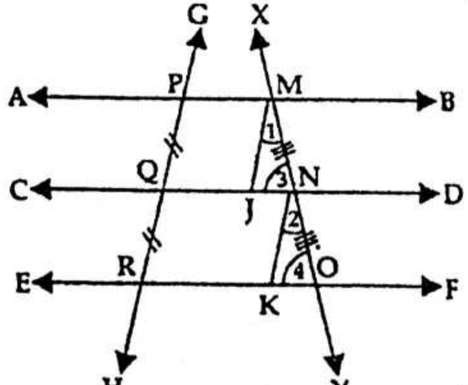
(i) ہم نقطہ خطوط (Concurrent lines) : اگر تین یا زیادہ خطوط ایک ہی نقطہ سے گزرتے ہوں تو وہ ہم نقطہ خطوط کہلاتے ہیں۔

(ii) مرکز نما (Centroid) : وہ نقطہ جس سے تینوں وسطانیے گزرتے ہوں مثلث کا مرکز نما کہلاتا ہے۔

.3 ΔABC کے وسطانیہ $\overline{AD}$ ، $\overline{BE}$ ، $\overline{CF}$ نقطہ H پر ملتے ہیں۔ ثابت کیجیے کہ H مثلث DEF کا مرکز نما ہے۔

مسئلہ 15

اگر تین یا زیادہ متوازی خطوط ایک خطِ قاطع پر متماثل قطعات قطع کریں تو وہ ہر دوسرے خطِ قاطع متماثل قطعات قطع کریں گے۔



معلوم: متوازی خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ اور $\overleftrightarrow{EF}$ خطِ قاطع $\overleftrightarrow{GH}$ کو بالترتیب P , Q , R پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ:

$\overline{PQ} \cong \overline{QR}$

$\overleftrightarrow{XY}$ ایک اور خطِ قاطع ہے جو $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF}$ کو بالترتیب M , N , O پر قطع کرتا ہے۔

مطلوب: $\overline{NM} \cong \overline{NO}$

عمل: $\overleftrightarrow{GH}$ کے متوازی $\overline{MJ}$ اور $\overline{NK}$ کھینچیے۔

جو $\overleftrightarrow{CD}$ اور $\overleftrightarrow{EF}$ کو بالترتیب J اور K پر قطع کرتے ہیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
چوکور PQJM میں	
1. $\overline{PM} \parallel \overline{QJ}$	1. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ معلوم
اور $\overline{PQ} \parallel \overline{MJ}$	عمل
2. پس PMJQ ایک $\parallel^{\text{m}}$ ہے	2. متقابلہ اضلاع متوازی ہیں
3. $\therefore\ \overline{PQ} \cong \overline{MJ}$	3. $\parallel^{\text{m}}$ کے متقابلہ اضلاع (مسئلہ 11)
4. اسی طرح QRKN ایک $\parallel^{\text{m}}$ ہے	4. $\overline{QN} \parallel \overline{RK}$ اور $\overline{QR} \parallel \overline{KN}$
5. $\therefore\ \overline{QR} \cong \overline{NK}$	5. (3) میں دیئے ہوئے سبب کے مطابق
6. لیکن $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$	6. معلوم
7. $\therefore\ \overline{MJ} \cong \overline{NK}$	7. مساوات کی خاصیت متعدیت
8. اب $\overline{MJ} \parallel \overline{NK}$	8. ہر ایک $\overline{GH}$ کے متوازی ہے۔
9. $\therefore\ \angle 1 \cong \angle 2$	9. متوازی خطوط کے متناظرہ زاویے

.10 $\Delta MNJ \leftrightarrow \Delta NOK$ میں	.10
(i) $\angle 1 \cong \angle 2$	(i) (9) میں ثابت ہو چکا
(ii) $\angle 3 \cong \angle 4$	(ii) متوازی خطوط کے متناظرہ زاویے
(iii) $\overline{MJ} \cong \overline{NK}$	(iii) اوپر (7) میں ثابت ہوا
.11 $\therefore \Delta MNJ \cong \Delta NOK$	.11 ز۔ز۔ض ≅ ز۔ز۔ض
.12 $\therefore \overline{MN} \cong \overline{NO}$	.12 مثلثوں کا تماثل

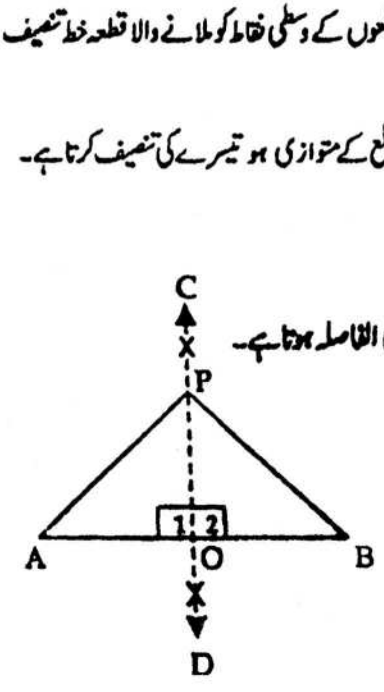
فہو المطلوب

مشق 8.14

1. کسی مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقاط کو ملانے سے تشکیل پانے والا مثلث دیئے ہوئے مثلث کا مساوی الزاویہ ہوتا ہے۔
2. کسی چوکور کے متقابلہ اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعہ خطوط ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
3. کسی ذوزنقہ کے غیر متوازی اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط متوازی خطوط کے متوازی اور لمبائی میں انکے مجموعہ کا نصف ہوتا ہے۔
4. کسی مثلث میں راس سے قاعدہ پر کھینچا جانے والے ہر قطعہ خط کو دیگر دو ضلعوں کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تنصیف کرتا ہے۔
5. کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطے سے کھینچے جانے والا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہو تیسرے کی تنصیف کرتا ہے۔

مسئلہ 16

کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع کوئی نقطہ اس کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔



معلوم: $\overleftrightarrow{CD}$ قطعہ خط $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے جو اسے O پر قطع کرتا ہے۔ P ناصف $\overleftrightarrow{CD}$ پر کوئی نقطہ ہے۔

مطلوب: $\overline{AP} \cong \overline{BP}$

یعنی A اور B سے P مساوی فاصلے پر ہے۔

ثبوت:

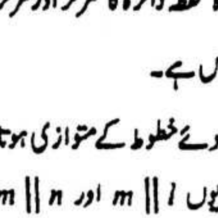
بیانات	دلائل
1. $\Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$ میں	1.
(i) $\overline{AO} \cong \overline{BO}$	(i) معلوم (O وسطی نقطہ ہے)
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) معلوم (O پر $\overline{CD} \perp \overline{AB}$)
(iii) $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	(iii) مشترک
2. $\therefore \Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$	2. اصول موضوعہ ض۔ز۔ض
3. $\therefore \overline{AP} \cong \overline{BP}$	3. مثلثوں کا تماثل
4. لیکن $\overleftrightarrow{CD}$ پر P کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے۔	4. مفروضہ
5. اسی طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $\overleftrightarrow{CD}$ کا کوئی دوسرا نقطہ بھی A اور B سے مساوی فاصلہ پر ہے۔ پس عمودی ناصف پر ہر نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔	5. مندرجہ بالا طریقہ سے

فہو المطلوب

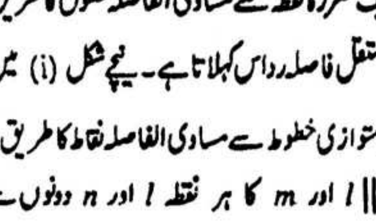
طریق (Locus) :

طریق (جمع طرائق) ان تمام نقاط کے سیٹ کی ایک ہندسی شکل ہوتی ہے جو دی ہوئی شرط یا شرائط کے سیٹ پر پوری اترتی ہو۔ مثلاً

1. ایک مقررہ نقطہ سے مساوی الفاصلہ نقطوں کا طریق دائرہ ہوتا ہے۔ مقررہ نقطہ دائرہ کا مرکز اور مرکز سے نقطوں کا مساوی یا مستقل فاصلہ رداس کہلاتا ہے۔ نیچے شکل (i) میں O مرکز اور r رداس ہے۔
2. دو متوازی خطوط سے مساوی الفاصلہ نقاط کا طریق ایک خط ہے جو دیئے ہوئے خطوط کے متوازی ہوتا ہے۔ شکل (ii) میں $l \parallel n$ اور m کا ہر نقطہ l اور n دونوں سے مساوی الفاصلہ ہے یوں $l \parallel m$ اور $n \parallel m$



شکل (i)

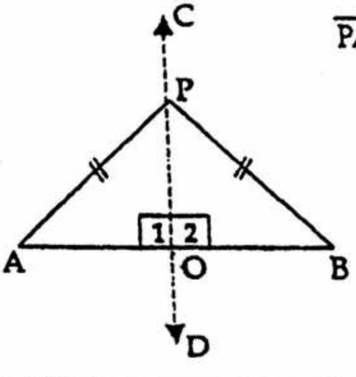


شکل (ii)

مسئلہ 17

(مسئلہ 16 کا عکس)

دو مقررہ نقطوں سے مساوی الفاصلہ نقاط کا طریق ان مقررہ نقطوں کو ملانے والے خط کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔



معلوم: A ، B دو مقررہ نقاط اور P ایک ایسا متحرک نقطہ ہے کہ $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

مطلوب: نقطہ P قطعہ خط $\overline{AB}$ کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

عمل: $\overline{AB}$ کی تنصیف نقطہ O پر کیجیے۔

نقاط P اور O کو ملائیے۔

ثبوت:

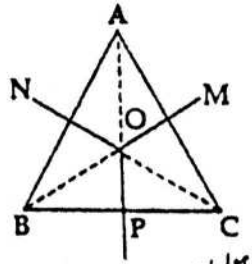
بیانات	دلائل
1. $\Delta POA \leftrightarrow \Delta POB$ میں (i) $\overline{AO} \cong \overline{OB}$ (ii) $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ (iii) $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	1. (i) عمل (ii) معلوم (iii) مشترک
2. لہٰذا $\Delta POA \cong \Delta BOP$	2. ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض
3. $\angle 2 \cong \angle 1$	3. مثلثوں کا تماثل
4. لیکن 1 ∠ اور 2 ∠ سپلیمنٹری زاویے ہیں	4. $\overleftrightarrow{AB}$ ایک خط ہے (سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ)
5. 1 ∠ اور 2 ∠ میں ہر ایک قائمہ زاویہ ہے	5. اگر دو سپلیمنٹری زاویے متماثل ہوں تو ہر ایک قائمہ زاویہ ہے۔
6. پس $\overline{PO}$ قطعہ خط $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے	6. $\overline{AO} \cong \overline{BO}$ اور $\overline{PO} \perp \overline{AB}$
7. پس نقاط A اور B سے مساوی الفاصلہ پر ہر نقطہ $\overline{AB}$ کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔	7. مندرجہ بالا طریقہ سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔

فہو المطلوب

مشق 8.15

1. ثابت کیجیے کہ ایک ہی قاعدہ پر بنے ہوئے متماثل الساقین مثلثوں کے راسوں کا طریق قاعدہ کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔
2. ثابت کیجیے کہ متوازی خطوط سے مساوی الفاصلہ نقاط کا طریق دیے ہوئے خطوط کے متوازی ایک خط ہوتا ہے۔
3. ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے کسی بھی دو اضلاع کے عمودی ناصفوں کا نقطہ تقاطع مثلث کے راسوں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

مسئلہ 18



کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

معلوم: ایک مثلث ABC ہے

مطلوب: مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

عمل: اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ پر عمودی ناصف $\overline{NO}$ اور $\overline{MO}$ بنایئے جو نقطہ O پر قطع کرتے ہوں۔
$\overline{BC}$ کو نقطہ P پر تنصیف کیجیے۔
$\overline{OP}$ ، $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ ، $\overline{OC}$ کو کھینچیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1. $\overline{NO}$ ضلع $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف ہے۔	1. عمل
2. $\therefore\ \overline{AO} \cong \overline{OB}$	2. مسئلہ 16
3. اسی طرح $\overline{AO} \cong \overline{OC}$	3. اس لیے کہ $\overline{MO}$ ضلع $\overline{AC}$ کا عمودی ناصف ہے۔
4. $\therefore\ \overline{OB} \cong \overline{OC}$	4. دونوں $\overline{AO}$ کے متماثل ہیں۔
5. P ضلع $\overline{BC}$ کا وسطی نقطہ ہے۔	5. عمل
6. لہٰذا $\overline{OP}$ ضلع $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف ہے۔	6. مسئلہ 17
7. پس مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔	7. اس لیے کہ تینوں عمودی ناصف ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

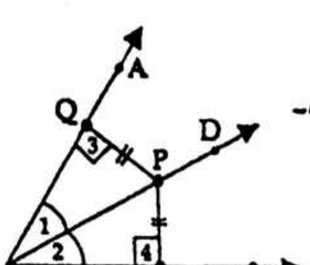
فہوالمطلوب

نوٹ: یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ مثلث ABC میں نقطہ O نقاط A، B، C سے مساوی الفاصلہ ہے۔
O کو مرکز مان کر $\overline{OA}$ رداس کا دائرہ A ، B ، C سے گزرے گا۔ اس دائرہ کو مثلث ABC کا محاصر دائرہ (*Circum-circle*) ، O کو محاصر مرکز (*Circum-centre*) اور $\overline{OA}$ (یا $\overline{OB}$ یا $\overline{OC}$) کو محاصر رداس کہا جاتا ہے۔

مشق 8.16

1. اگر کسی مثلث کا محاصر مرکز اس کے دو اضلاع سے مساوی الفاصلہ ہو تو ہو متماثل الساقین مثلث ہوگا۔
2. اگر کسی مثلث کا محاصر مرکز اس کے تینوں اضلاع سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ مساوی الاضلاع ہوگا۔
3. اگر مثلث PQR کا محاصر مرکز O ہے تو ثابت کیجیے کہ $m\angle QOR = 2m\angle QPR$
4. کسی مستطیل کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔
5. وہ نقطہ معلوم کیجیے جو دیئے ہوئے تین غیر ہم خط نقاط سے مساوی الفاصلہ ہو ثبوت کے ذریعہ جواز پیش کیجیے۔
6. ثابت کیجیے کہ قائمہ زاویہ مثلث کا محاصر مرکز وتر کے وسطی نقطہ پر منطبق ہوتا ہے۔
7. ثابت کیجیے کہ حادہ زاویہ مثلث کا محاصر مرکز مثلث کے اندرونے میں ہوگا۔
8. ثابت کیجیے کہ منفرجہ زاویہ مثلث کا محاصر مرکز مثلث کے بیرونے میں ہوگا۔

مسئلہ 19



کسی زاویے کے ناصف پر واقع ہر نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

معلوم: $\overrightarrow{BD}$ زاویہ ABC کا ناصف ہے۔ P شعاع $\overrightarrow{BD}$ کا کوئی نقطہ ہے۔
$\overline{PQ}$ اور $\overline{PR}$ بالترتیب $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ پر عمود ہیں۔

مطلوب: $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ یعنی نقطہ P شعاع $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

ثبوت:

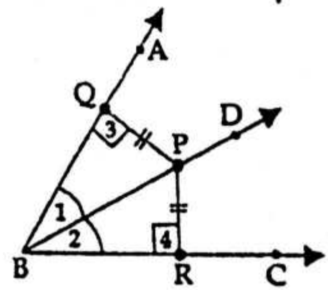
بیانات	دلائل
.1 $\Delta PQB \leftrightarrow \Delta PRB$ میں	.1
(i) $\angle 4 \cong \angle 3$	(i) دونوں زاویے قائمہ ہیں
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) $\overrightarrow{BD}$ ناصف ہے (معلوم)
(iii) $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	(iii) مشترک ہے
.2 لہٰذا $\Delta PQB \cong \Delta PRB$	.2 ز۔ز۔ض ≅ ز۔ز۔ض
.3 $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ یعنی نقطہ P شعاع $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے مساوی الفاصلہ ہے۔	.3 مثلثوں کا تماثل

فہو المطلوب

مسئلہ 20

(مسئلہ 19 کا عکس)

کسی زاویے کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ نقطہ کا طریق زاویہ کا ناصف ہوتا ہے۔



معلوم: نقطہ P شعاع $\overrightarrow{BD}$ کا کوئی نقطہ ہے جو زاویہ ABC کے بازوؤں $\overrightarrow{BA}$ اور $\overrightarrow{BC}$ سے مساوی الفاصلہ ہے یعنی $\overline{PR} \perp \overrightarrow{BC}$ اور $\overline{PQ} \perp \overrightarrow{BA}$ اور $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$

مطلوب: $\angle 2 \cong \angle 1$ یعنی $\overrightarrow{BD}$ زاویہ $\angle ABC$ کا ناصف ہے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
.1 $\Delta PQB \leftrightarrow \Delta PRB$ میں	.1 قائمہ زاویہ مثلثوں میں مطابقت
(i) $\angle 3 \cong \angle 4$	(i) دونوں زاویے قائمہ ہیں
(ii) $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	(ii) معلوم
(iii) $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	(iii) مشترک وتر
.2 لہٰذا $\Delta PQB \cong \Delta PRB$	.2 قائمہ زاویہ مثلثوں میں و۔ض ≅ و۔ض
.3 پس $\angle 2 \cong \angle 1$ یعنی $\overrightarrow{BD}$ زاویہ $\angle ABC$ کا ناصف ہے	.3 مثلثوں کا تماثل

فہوالمطلوب

محصور مرکز (*Incentre*) : کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصفین ایک ہی نقطہ سے گزرتے ہیں جسے مثلث کا محصور مرکز کہتے ہیں۔ یہ مثلث میں محصور دائرہ (*Inscribed circle*) کا مرکز ہوتا ہے۔ (محصور دائرہ : مثلث کے اندر بنا ہوا ایسا دائرہ جس پر مثلث کے تینوں اضلاع مماس ہوں)۔

مشق 8.17

1. ثابت کیجیے کہ مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصفین ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔
2. دو قطع کرنے والے خطوط سے مساوی الفاصلہ نقطے کا طریق ان خطوط سے بنے ہوئے زاویہ کا ناصف ہوتا ہے۔
3. کسی مثلث کے راسوں کے متقابلہ ضلعوں پر کھینچے گئے عمود ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

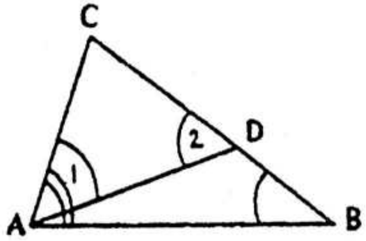
عمودی مرکز: مثلث کے ارتفاعوں (راسوں سے متقابلہ ضلعوں پر کھینچے گئے عمود) کا نقطہ تقاطع مثلث کا عمودی مرکز (*Ortho-Centre*) کہلاتا ہے۔

4. اگر O مثلث ABC کا عمودی مرکز ہے تو ثابت کیجیے کہ AOB ∠ اور ACB ∠ سپلیمنٹری زاویے ہیں۔
5. منفرجہ زاویہ ، قائمہ زاویہ اور حادہ زاویہ مثلثوں کے عمودی مرکز بالترتیب مثلث کے باہر ، اس کے کسی نقطہ پر منطبق یا مثلث کے اندر ہوتے ہیں۔
6. مثلث ABC میں A ∠ اور B ∠ کے ناصف O پر قطع کرتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ $\overline{OC}$ زاویہ ACB کا ناصف ہے۔
7. ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے کسی راس کے زاویے کا ناصف قاعدے کو جہاں قطع کرتا ہے اس نقطہ کا اضلاع سے فاصلہ مساوی ہوتا ہے۔
8. ایسے تین خطوط سے مساوی الفاصلہ نقطہ معلوم کیجیے جن میں سے کوئی دو خط متوازی نہ ہوں۔
9. ثابت کیجیے کہ ایک مساوی الاضلاع مثلث کے محاصر مرکز اور محصور مرکز منطبق ہوتے ہیں۔
10. ثابت کیجیے کہ ایک مساوی الاضلاع مثلث کے محصور مرکز ، محاصر مرکز ، مرکز نما (*Centroid*) اور عمودی مرکز منطبق ہوتے ہیں۔

8.16 نابرابری (Inequalities)

مسئلہ 1

اگر کسی مثلث کے دو اضلاع لمبائی میں نابرابر ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار زیادہ ہوتی ہے۔



معلوم: ΔABC میں $m\overline{BC} > m\overline{AC}$

مطلوب: $m\angle A > m\angle B$

عمل: $\overline{BC}$ سے $\overline{CD}$ متماثل $\overline{AC}$ کے قطع کیا۔ D کو A سے ملایا۔

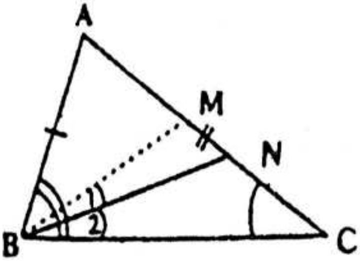
ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ ΔACD میں $\overline{AC} \cong \overline{CD}$	1۔ عمل
2۔ $m\angle CAD = m\angle CDA$	2۔ متماثل اضلاع کے متقابلہ زاویے (نویں کی ریاضی کی کتاب کا مسئلہ 6)
3۔ لیکن $\angle CDA$ مثلث ABD کا بیرونی زاویہ ہے۔	3۔ بیرونی زاویے کی تعریف کی رو سے
4۔ $\therefore m\angle CDA > m\angle B$	4۔ بیرونی زاویہ زندرونی غیر متصلہ زاویے سے بڑا ہوتا ہے۔ (نویں کی ریاضی کی کتاب کا مسئلہ 2)
5۔ لیکن $m\angle A > m\angle CAD$	5۔ $m\angle A = m\angle CAD + m\angle DAB$
6۔ $\therefore m\angle A > m\angle CDA$	6۔ $m\angle CDA = m\angle CAD$
7۔ $\therefore m\angle A > m\angle B$	7۔ اوپر (4) اور (6) میں نابرابری کی خاصیت متعدیت

فہو المطلوب

مسئلہ 1 (الف)

اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں نابرابر ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہوتا ہے۔



معلوم: ΔABC

$m\angle B > m\angle C$

مطلوب: $m\overline{AC} > m\overline{AB}$

عمل: $\angle ABM$ بنائیے جو $\angle C$ کے متماثل ہو۔

$\angle MBC$ کا ناصف $\overline{BN}$ کھینچیے یعنی $m\angle 1 = m\angle 2$

بیانات	دلائل
1۔ ΔCBN کا بیرونی زاویہ $\angle ANB$ ہے۔	1۔ بیرونی زاویے کی تعریف کی رو سے
2۔ $m\angle ANB = m\angle C + m\angle 2$	2۔ نویں کی ریاضی کی کتاب کا مسئلہ 5 نتیجہ صریح 5
$= m\angle C + m\angle 1$	$\because m\angle 2 = m\angle 1$ (عمل)
$= m\angle ABM + m\angle 1$	$\because m\angle C = m\angle ABM$ (عمل)
$= m\angle ABN$	زاویوں کی جمع کا موضوعہ
3۔ $\therefore \overline{AB} \cong \overline{AN}$	3۔ $\because m\angle ANB = \angle ABN$ (اوپر ثابت کیا گیا)
4۔ $\therefore m\overline{AC} > m\overline{AB}$	4۔ $\because m\overline{AC} > m\overline{AN}$

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 1۔ قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر باقی دونوں اضلاع سے زیادہ لمبا ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح 2۔ منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے سامنے کا ضلع باقی دونوں اضلاع سے زیادہ لمبا ہوتا ہے۔

مشق 8.18

1۔ کسی مثلث کے سب سے بڑے ضلع کا متقابلہ زاویہ سب سے بڑا ہوتا ہے۔

2۔ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع غیر مساوی ہوں تو چھوٹے ضلع کا متقابلہ زاویہ حادہ ہوتا ہے۔

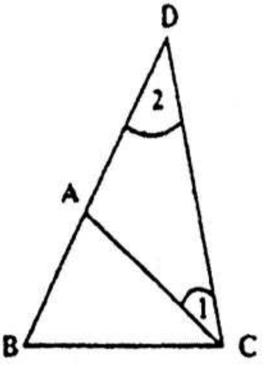
3۔ کسی مثلث کے سب سے بڑے زاویے کا متقابلہ ضلع سب سے بڑا ہوتا ہے۔

4۔ قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے۔

5۔ مسئلہ 1 (الف) کا متبادل ثبوت دیجیے یہ فرض کرتے ہوئے کہ اگر $m\overline{AC} \ngtr m\overline{AB}$ کو خاصیت ثلاثی کے ذریعے
(i) $m\overline{AC} = m\overline{AB}$ یا (ii) $m\overline{AC} < m\overline{AB}$ اور
مفروضے کو غلط ثابت کیجیے۔

مسئلہ 2

مثلث کے کوئی سے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔



معلوم: ΔABC

مطلوب: (i) $m\overline{AB} + m\overline{AC} > m\overline{BC}$

(ii) $m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$

(iii) $m\overline{AC} + m\overline{BC} > m\overline{AB}$

عمل: $\overrightarrow{BA}$ کو نقطہ D تک اس طرح بڑھایا کہ $\overline{AD} \cong \overline{AC}$
D اور C کو ملایئے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ ΔADC میں $\overline{AD} \cong \overline{AC}$	1۔ عمل
2۔ $\therefore m\angle 1 = m\angle 2$	2۔ متماثل اضلاع کے متقابل زاویے
3۔ لیکن $m\angle BCD \quad m\angle 1$	3۔ $m\angle BCD = m\angle BCA + m\angle 1$

4- $\therefore m\angle BCD > m\angle 2$	4- نابرابری کی خاصیت متعدیت
5- $\triangle ABC$ میں $m\overline{BD} > m\overline{BC}$	5- بڑے زاویے کا متقابلہ ضلع بڑا ہوتا ہے (مسئلہ 1 الف)
6- لیکن $m\overline{BD} = m\overline{AB} + m\overline{AD}$ $= m\overline{AB} + m\overline{AC}$	6- عمل
7- $\therefore m\overline{AB} + m\overline{AC} > m\overline{BC}$	7- (5) میں $\overline{BD}$ کی قیمت رکھنے سے
8- اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں۔ کہ $m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$ اور $m\overline{BC} + m\overline{AC} > m\overline{AB}$	8- مندرجہ بالا طریقہ کار سے

فہو المطلوب

مشق 8.19

1- کسی چوکور کے اضلاع کا مجموعہ اس کے وتروں کے مجموعے سے بڑا ہوتا ہے۔

2- کسی چوکور کے تین اضلاع ایک ساتھ چوتھے سے بڑے ہوتے ہیں۔

3- کسی مثلث کی اساس کے سروں سے اس کے اندرونے میں کسی نقطے تک کھینچے گئے۔
قطعات کا مجموعہ اس کے دیگر دو اضلاع کے مجموعے سے کم ہوتا ہے۔

4- ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے کوئی دو اضلاع ایک ساتھ تیسرے ضلع پر وسطانیہ کا دگنا ہوتے ہیں۔

5- ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے وسطانیوں کا مجموعہ اس کے اضلاع کے مجموعے سے کم ہوتا ہے۔
(اشارہ: سوال 4 کے نتیجے کو استعمال کیجیے)

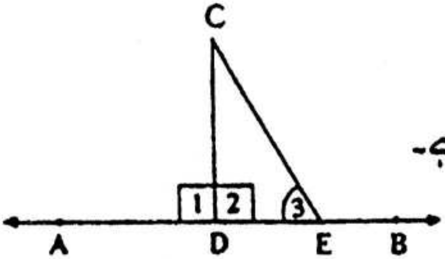
6- کسی مثلث کے کوئی دو اضلاع کا فرق تیسرے ضلع سے کم ہوتا ہے۔

مسئلہ 3

کسی نقطے سے جو کسی خط کے باہر واقع ہو، خط تک عمود سب سے کم فاصلہ ہوتا ہے۔

یا

کسی نقطے سے جو خط پر نہ ہو، خط تک کھینچے گئے تمام قطعات میں سے عمود سب سے چھوٹا ہوتا ہے۔



معلوم: نقطہ C سے $\overline{CD}$ خط AB پر عمود کھینچا گیا ہے۔ جو نقطہ D پر ملتا ہے۔
اور $\overline{CE}$ ایک دوسرا قطعہ ہے جو $\overleftrightarrow{AB}$ کو نقطہ E پر ملتا ہے۔

مطلوب: $m\overline{CD} \angle m\overline{CE}$

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ $\angle 1$ مثلث CDE کا بیرونی زاویہ ہے	1۔ بیرونی زاویے کی تعریف کی رو سے
2۔ $\therefore m\angle 1 > m\angle 3$	2۔ بیرونی زاویہ متقابلہ اندرونی زاویے سے بڑا ہوتا ہے
3۔ $\therefore m\angle 2 > m\angle 3$	3۔ $m\angle 1 = m\angle 2$ (قائمہ زاویے)
4۔ $\therefore m\overline{CE} > m\overline{CD}$ یعنی $m\,\overline{CD} \angle m\,\overline{CE}$	4۔ بڑے زاویے کا متقابلہ ضلع (مسئلہ 1 (الف))
5۔ اسی طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $m\,\overline{CD}$ کسی دوسرے قطعہ جو C سے $\overleftrightarrow{AB}$ تک کھینچا گیا ہو، کم ہے	5۔ مندرجہ بالا طریقہ کار سے

فہو المطلوب

مشق 8.20

1۔ ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے دو اضلاع ایک ساتھ عمود کے دگنے سے زیادہ ہوتے ہیں جسے راس جہاں دونوں اضلاع ملتے ہیں، سے متقابلہ ضلع پر کھینچا گیا ہے۔

2۔ کسی مثلث کا احاطہ اس کے تینوں عمودوں کے مجموعے سے بڑا ہوتا ہے۔

3۔ کسی متماثل الساقین مثلث کے متماثل اضلاع ایک ساتھ اساس پر وسطانیہ کے دگنے سے بڑے ہوتے ہیں۔

4۔ کسی خط پر اس سے باہر دیئے گئے نقطے سے زیادہ سے زیادہ دو متماثل قطعات کھینچے جا سکتے ہیں۔

5۔ کسی متماثل الساقین مثلث کے راس سے اساس کے کسی نقطے تک کھینچا گیا قطعہ خط متماثل اضلاع میں سے ہر ایک سے کم ہوتا ہے۔

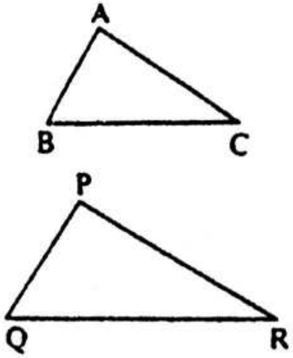
6۔ کسی مثلث کا کوئی سا ضلع اس کے تین اضلاع کے مجموعے کے نصف سے کم ہوتا ہے۔

8.17 متشابہ اشکال

دو کثیر اضلاع متشابہ (*Similar*) کہلاتی ہے اگر ان کے درمیان ایک ایک مطابقت میں:

(i) ان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوں اور

(ii) ان کے متناظرہ زاویے متماثل ہوں۔



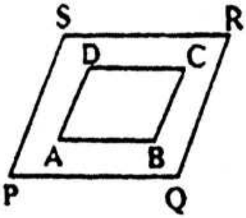
مثال 1: $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta PQR$ میں

$\angle C \cong \angle R,\ \angle B \cong \angle Q,\ \angle A \cong \angle P$

اور
$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{PR}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{QR}}$$

پس $\Delta ABC, \Delta PQR$ کے متشابہ ہے۔ علامتی طور پر اسے اس طرح لکھتے ہیں:

$$\Delta ABC \sim \Delta PQR$$



مثال 2: $\|^{gm} ABCD \longleftrightarrow \|^{gm} PQRS$ میں

$<D = <S$ اور $<C = <R,\ <B = <Q,\ <A = <P$

اور
$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{QR}} = \frac{m\overline{DC}}{m\overline{SR}} = \frac{m\overline{AD}}{m\overline{SP}}$$

پس $\|^{gm} ABCD \sim \|^{gm} PQRS$ میں

مزید یہ کہ جب بھی مقداریں تناسب میں ہوں تو ہم ہمیشہ ایک مقدار کو دوسری کے اضعاف (*Multiple*) میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثلاً اگر
$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{CD}}{m\overline{RS}} = K$$

تو $m\overline{CD} = K(m\overline{RS})$ اور $m\overline{AB} = K(m\overline{PQ})$

جبکہ K مثبت حقیقی عدد ہے۔

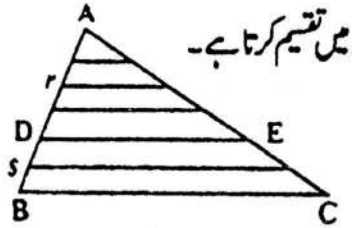
نوٹ:

1۔ مثلثوں کے تشابہ کے لئے دو شرائط میں سے صرف ایک کا پورا ہونا کافی ہے۔

2۔ چار یا زائد اضلاع والے کثیر الاضلاع کے تشابہ کے لئے دونوں شرائط کو پورا ہونا ضروری ہے۔

مسئلہ 4

کسی مثلث کے ایک ضلع کے متوازی خط باقی دو اضلاع کو متناسب حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔



معلوم: ΔABC میں $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

مطلوب: $m\overline{AD} : m\overline{DB} = m\overline{AE} : m\overline{EC}$

عمل: فرض کیجیے کہ لمبائی کی اکائی اس طرح اختیار کی گئی ہے کہ $m\overline{AD} = r$ اور $m\overline{BD} = s$ جبکہ r اور s غیر صفر مکمل اعداد ہیں۔
$\overline{AD}$ کو r متماثل قطعات میں اور $\overline{BD}$ کو s متماثل قطعات میں اس طرح تقسیم کیا کہ $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{r}{s}$ نقاط تقسیم سے $\overline{BC}$ کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1۔ متوازی خطوط $\overline{AD}$ کو r متماثل قطعات تقسیم کرتے ہیں۔	1 عمل
2۔ پس یہی متوازی خطوط دوسرے خط قاطع $\overline{AE}$ کو r متماثل قطعات تقسیم کرتے ہیں۔	2۔ مسئلہ 15 (نویں کی ریاضی کی کتاب ملاحظہ کیجیے)
3۔ اسی طرح $\overline{EC}$ کو s متماثل قطعات میں تقسیم کیا گیا ہے	3۔ $\overline{BD}$ کو s متماثل قطعات میں متوازی خطوط نے تقسیم کیا ہے۔
4۔ پس $\frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}} = \frac{ra}{sa}$ یہاں متماثل قطعات میں سے ہر ایک کی مقدار ہے۔ یا $\frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}} = \frac{r}{s}$	4۔ اوپر (2) اور (3) سے
5۔ لیکن $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{r}{s}$	5۔ عمل
6۔ $\therefore \frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$ یا $m\overline{AD} : m\overline{DB} = m\overline{AE} : m\overline{EC}$	6۔ برابری کی خاصیت متعدیت (ہر ایک $\frac{r}{s}$ کے مساوی ہے)

فہو المطلوب

نتیجہ صریح 1۔ مسئلہ 4 کی شکل میں $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}}$

$$\left|\because \frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}} \Rightarrow \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AD}+m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AB}+m\overline{AC}}\right|$$

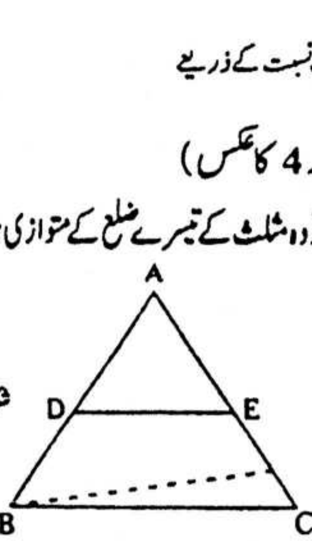
پہلے عکس نسبت پھر ترکیب نسبت کا استعمال کیا۔

نتیجہ صریح 2۔ اس طرح اوپر کی شکل میں $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{EC}}$ ترکیب نسبت کے ذریعے

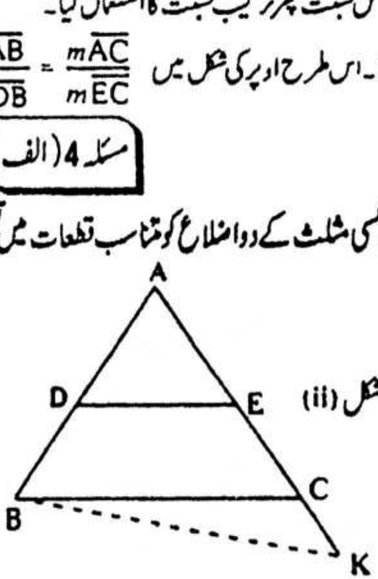
مسئلہ 4 (الف) (مسئلہ 4 کا عکس)

اگر کوئی خط کسی مثلث کے دو اضلاع کو متناسب قطعات میں تقسیم کرتا ہے تو وہ مثلث کے تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

شکل (i)



شکل (ii)



معلوم: ΔABC میں $\overline{DE}$ ، $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کو بالترتیب نقاط D اور E پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$

مطلوب: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

اگر $\overline{DE}$، $\overline{BC}$ کے متوازی نہیں ہے تو $\overline{BK}$ کھینچیے جو $\overrightarrow{AC}$ کو بڑھانے سے نقطہ K پر ملتا ہے۔

بیانات	دلائل
1- ΔABK میں $\overline{DE} \parallel \overline{BK}$	1- عمل
2- $\therefore \frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EK}}$	2- مسئلہ 4
3- لیکن $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$	3- معلوم
4- $\therefore \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EK}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$	4- ہر ایک $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}}$ کے مساوی ہے۔ (برابری کی خاصیت متعدیت)

5۔ یہ دلالت کرتا ہے کہ $\overline{EK} \cong \overline{EC}$ یا $m\overline{EK} = m\overline{EC}$	5۔ اگر مقدم برابر ہوں تو موخر بھی برابر ہوتے ہیں۔
6۔ یہ اسی وقت ممکن ہے جب C, K کے ساتھ منطبق ہوتا ہو۔	6۔ E دونوں میں مشترک نقطہ ہے۔
7۔ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	7۔ ہمارا مفروضہ غلط ہے۔

فہوالمطلوب

نتیجہ صریح 1۔ مندرجہ بالا شکل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

اگر $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{EC}}$ تو $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

نتیجہ صریح 2۔

اگر $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}}$ تو $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

مشق 8.21

1۔ تین متوازی خطوط l ، m ، n دیگر خطوط x اور y کو بالترتیب نقاط A ، B ، C اور P ، Q ، R پر قطع کرتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \dfrac{m\overline{PQ}}{m\overline{QR}}$

2۔ ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطے سے اساس کے متوازی کھینچا گیا خط دوسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

3۔ ذوزنقہ ABCD *(Trapezium)* کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔
ثابت کیجیے کہ $m\overline{OA} : m\overline{OC} = m\overline{OB} : m\overline{OD}$

4۔ ثابت کیجیے کہ ذوزنقہ کے اضلاع کے متوازی کھینچا گیا خط غیر متوازی اضلاع کو متناسب حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

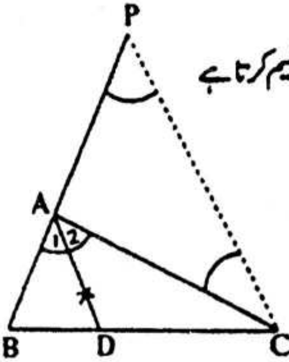
5۔ ثابت کیجیے کہ کسی مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

6۔ ثابت کیجیے کہ ذوزنقہ کے غیر متوازی خطوط کو ایک ہی تناسب سے تقسیم کرنے والا خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

7۔ ذوزنقہ کے غیر متوازی خطوط کی مقدار 8 سینٹی میٹر اور 14 سینٹی میٹر ہے۔ متوازی خطوط متوازی خط ذوزنقہ کے ارتفاع کو نسبت 3:1 میں تقسیم کرتا ہے۔ ذوزنقہ کے غیر متوازی خطوط پر اس خط سے بننے والے قطعات کی مقداریں معلوم کیجیے۔

8۔ ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے متواتر اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعات متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

مسئلہ 5



مثلث کی کسی زاویے کا ناصف متقابلہ ضلع کو ان اضلاع کی لمبائیوں کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جن کے درمیان زاویہ ہے۔

معلوم: مثلث ABC کے زاویے BAC کا ناصف $\overline{AD}$ ہے۔

مطلوب: $\dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}}$

عمل: $\overline{AD}$ کے متوازی $\overrightarrow{CP}$ کھینچیے جو $\overline{BA}$ کو بڑھانے سے نقطہ P پر ملے۔

ثبوت:

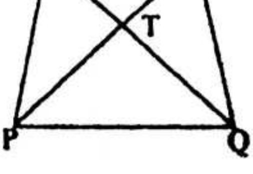
بیانات	دلائل
1- $\overline{AD} \parallel \overline{PC}$	1- عمل
2- $\therefore \angle 1 \cong \angle P$	2- متناظرہ زاویے
3- اسی طرح $\angle 2 \cong \angle 3$	3- متوازی خطوط کے متبادلہ زاویے
4- لیکن $\angle 2 \cong \angle 1$	4- معلوم
5- $\therefore \angle P \cong \angle 3$	5- خاصیت متعدیت
6- $\therefore \overline{AP} \cong \overline{AC}$	6- متماثل زاویوں کے متقابلہ اضلاع
7- مزید APC میں $\overline{AD} \parallel \overline{PC}$	7- عمل
8- $\therefore \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AP}}$	8- مسئلہ 4
9- $\therefore \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}}$	9- کیونکہ $\overline{AC} \cong \overline{AP}$ (اوپر ثابت کیا)

فہو المطلوب

مشق 8.22

1- اگر کسی مثلث کے راس زاویے کا ناصف اساس کی تنصیف کرتا ہے تو مثلث متماثل الساقین ہوتا ہے۔

2- PQRS ایک چوکور ہے اور زاویوں Q اور S کا ناصف وتر $\overline{PR}$ کو نقطہ T پر ملتا ہے۔

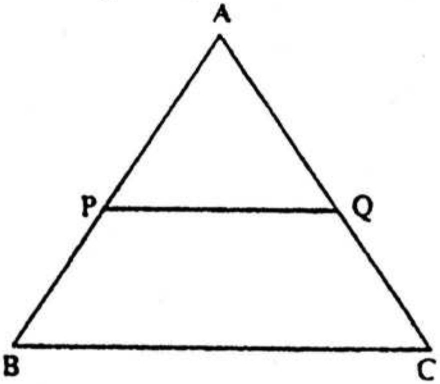


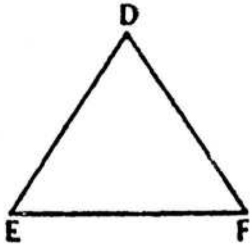
ثابت کیجیے۔ $\dfrac{m\overline{PQ}}{m\overline{QR}} = \dfrac{m\overline{PS}}{m\overline{RS}}$

3۔ متماثل الساقین مثلث ABC کی اساس کے زاویے B کی تنصیف کرتے ہوئے قطعہ خط مخالف ضلع AC کے نقطہ D پر ملتا ہے اور D سے $\overline{BC}$ کے متوازی $\overline{DE}$ کھینچا جو $\overline{AB}$ کو E پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ $\overline{CE}$ زاویہ ACB کی تنصیف کرتا ہے۔

مسئلہ 6

اگر دو مثلثیں متماثل الزاویہ *(Equiangular)* ہوں تو ان کے متناظر اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔





معلوم: $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$ میں

$\angle A \cong \angle D$، $\angle B \cong \angle E$ اور $\angle C \cong \angle F$

مطلوب: $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{EF}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$

عمل: $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ سے $\overline{AP}$ اور $\overline{AQ}$ اس قطع کیجیے کہ $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ اور $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$ ، P اور Q کو ملائیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1. $\triangle APQ \longleftrightarrow DEF$ میں	1.
(i) $\overline{AP} \cong \overline{DE}$	(i) عمل
(ii) $\angle A \cong \angle D$	(ii) معلوم
(iii) $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$	(iii) عمل
2. $\therefore \triangle APQ \cong \angle DEF$	2. ض۔ز۔ض = ض۔ز۔ض
3. $\therefore \angle APO \cong \angle E$	3. مثلثوں کے تماثل کی رو سے
4. لیکن $\therefore \angle B \cong \angle E$	4. معلوم
5. $\therefore \angle APQ \cong \angle B$	5. ہر ایک $\angle E$ کے متماثل ہے

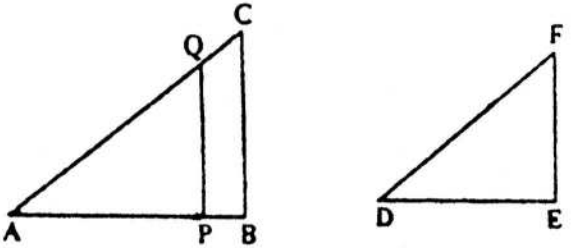
6- $\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	6- متناظرہ زاویے متماثل ہیں۔
7- $\therefore \frac{m\overline{AB}}{m\overline{AP}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AQ}}$	7- مسئلہ 4 نتیجہ صریح 1
8- یا $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$	8- چونکہ $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ اور $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$
9- اس طرح $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}}$	9- مندرجہ بالا طریقہ کار سے
10- پس $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$	10- (8) اور (9) کو اکٹھا کرتے ہوئے

فہو المطلوب

مسئلہ 6 (الف)

(مسئلہ 6 کا عکس)

اگر دو مثلثوں کی دی ہوئی مطابقت میں ان کے متناظر اضلاع متناسب ہیں تو ان کے متناظرہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔



معلوم: $\triangle ABC \longleftrightarrow \triangle DEF$ میں

$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$$

مطلوب: $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

عمل: $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ سے $\overline{AP}$ اور $\overline{AQ}$ اس قطع کیجیے کہ $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ اور $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$ ، P اور Q کو ملائیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1- $\therefore \frac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}}$	1- معلوم
2- $\therefore \frac{m\overline{AB}}{m\overline{AP}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AQ}}$	2- چونکہ $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ اور $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$ (عمل)
3- $\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	3- مسئلہ 4 (الف) کی رو سے
4- $\therefore \angle APQ \cong \angle B, \angle AQP \cong \angle C$	4- متوازی خطوط کے متناظرہ زاویے

5۔	$\angle A \cong \angle A$ اور	5۔	ذاتی تماثل
6۔	چونکہ ΔAPQ اور ΔABC مساوی الزاویہ ہیں	6۔	متناظرہ زاویے متماثل ہیں
7۔	$\therefore \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AP}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{PQ}}$ یا $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{PQ}}$	7۔	مسئلہ 6 کی رو سے $\overline{DE} \cong \overline{AP}$
8۔	$\therefore \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}}$	8۔	معلوم
9۔	$\therefore \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{PQ}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}}$	9۔	برابری کی خاصیت متعدیت
10۔	یعنی $m\overline{PQ} \cong m\overline{EF}$	10۔	مقدم برابر ہیں موخر ضرور برابر ہوتے ہیں
11۔	اب $\Delta APQ \leftrightarrow \Delta DEF$ میں	11۔	
(i)	$\overline{AP} \cong \overline{DE}$	(i)	عمل
(ii)	$\overline{AQ} \cong \overline{DF}$	(ii)	عمل
(iii)	$\overline{PQ} \cong \overline{EF}$	(iii)	اوپر (10) میں ثابت کیا
12۔	$\therefore \Delta APQ \cong \Delta DEF$	12۔	ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض
13۔	$\angle A \cong \angle D\ ,\ \angle P \cong \angle E, \angle Q \cong \angle F$	13۔	مثلثوں کے تماثل کی رو سے
14۔	پس $\angle A \cong \angle D\ ,\ \angle P \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$	14۔	$\angle AQP \cong \angle C\ ,\ \angle APQ \cong \angle B$ اوپر (4) میں ثابت کیا۔

ھوالمطلوب

مشق 8.23

1۔ اگر دو مثلثوں میں ایک کے تین اضلاع دوسری کے متناظرہ تین اضلاع کے متوازی ہوں تو ثابت کیجیے کہ ان کے اضلاع متناسب ہیں۔

2۔ دو قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں ان کے اضلاع متناسب ہوں گے اگر ایک کا حادہ زاویہ دوسری کے حادہ زاویے کے متماثل ہو۔

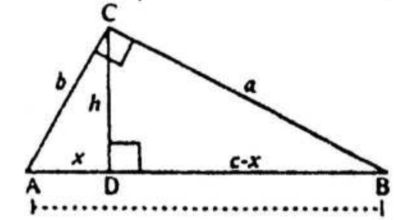
3۔ کسی مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعات ایک مثلث تشکیل دیتے ہیں جو کہ اصل مثلث کے مشابہ ہوتی ہے۔

4۔ قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویے سے وتر پر کھینچا گیا عمود مثلث کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ہر حصہ اصل مثلث کے مشابہ ہوتا ہے۔

8.18 مسئلہ فیثاغورث (Pythagoras Theoram)

مسئلہ 7

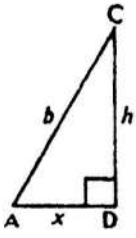
قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کا مربع دیگر دو اضلاع کی لمبائیوں کے کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

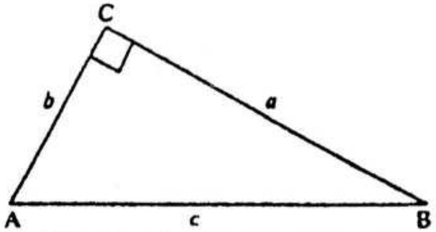


معلوم: مثلث ΔABC میں $\angle C$ قائمہ زاویہ ہے۔
وتر کی لمبائی c ہے اور $\overline{BC}$ اور $\overline{AC}$
کی لمبائیاں بالترتیب a اور b ہیں۔

مطلوب: $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{BC})^2 + (m\overline{AC})^2$ یعنی $c^2 = a^2 + b^2$

عمل: $\overline{AB}$ پر ایک عمود $\overline{CD}$ کھینچا جو $\overline{AB}$ کے نقطہ D پر ملتا ہے۔ فرض کیجیے $m\overline{CD} = h$ اور $m\overline{AD} = x$
تو $m\overline{BD} = c - x$ مندرجہ ذیل اشکال کو مدنظر رکھیے۔





ثبوت:

بیانات	دلائل
1- $\Delta ADC \longleftrightarrow \Delta ACB$ میں	1-
(i) $\angle A \cong \angle A$	(i) ذاتی تماثل
(ii) $\angle ADC \cong \angle ACB$	(ii) ہر ایک زاویہ قائمہ ہے
2- $\angle ACD \cong \angle B$	2- مسئلہ 5 نتیجہ صریح 6 (نویں کی ریاضی کی کتاب ملاحظہ کیجیے)
3- لہٰذا $\Delta ADC \cong \Delta ACB$	3- مسئلہ 6 کی رو سے
اور $\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{AC}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}}$	
یعنی $\dfrac{x}{b} = \dfrac{b}{c}$	
$\Rightarrow b^2 = cx \quad \ldots (\mathrm{I})$	وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب
4- اسی طرح $\Delta BCD \sim \Delta ABC$	4- مندرجہ بالا طریقہ کار سے

5- $\therefore \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{BC}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}}$ $\Rightarrow \dfrac{c-x}{a} = \dfrac{a}{c}$ $\Rightarrow a^2 = c(c-x)$ $\Rightarrow a^2 = c^2 - cx$ .... (ii)	5- مسئلہ 6 کی رو سے وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب خاصیت تقسیمی
6- $\therefore a^2 + b^2 = c^2 - cx + cx$ $\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$ یا $c^2 = a^2 + b^2$ یا $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{BC})^2 + (m\overline{AC})^2$	6- (i) اور (ii) کو جمع کرتے ہوئے برابری کی خاصیت تشاکل

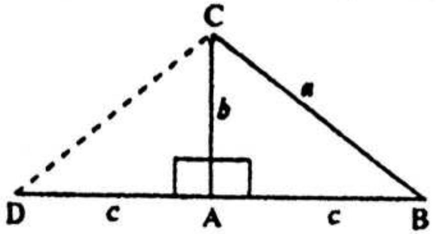
فہو المطلوب

نتیجہ صریح: اگر قائمہ مثلث میں قائمہ زاویے کے راس سے وتر پر عمود کھینچا جائے تو باقی دونوں اضلاع میں سے کسی ایک کا مربع وتر اور اس ضلع کے متصل قطعہ کے تحت بننے والے مستطیل کے برابر ہوتا ہے۔

مسئلہ 7 (الف)

(مسئلہ 7 کا عکس)

اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی کے مربع کے برابر ہو تو مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہوتی ہے۔



معلوم: ΔABC میں $(m\overline{BC})^2 = (m\overline{AC})^2 + (m\overline{AB})^2$

یعنی $a^2 = b^2 + c^2$

جبکہ $\overline{BC}$، $\overline{AC}$ اور $\overline{AB}$ کی بالترتیب لمبائیاں a، b اور c ہیں۔

مطلوب: $m\angle CAB = 90^\circ$

یعنی ΔABC قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

عمل: $\overline{AC}$ کے نقطے A پر عمود $\overline{AD}$ اس طرح گرائیے کہ $m\overline{AD} = m\overline{AB}$

C اور D کو ملائیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
1- قائمۃ الزاویہ مثلث CAD میں	1-
$(m\overline{CD})^2 = (m\overline{AC})^2 + (m\overline{AD})^2$	مسئلہ فیثا غورث
$= b^2 + c^2$	
$= a^2$	معلوم: $a^2 = b^2 + c^2$
2- $m\overline{CD} = a$	2- دونوں اطراف کا جذر المربع لینے
$= m\overline{BC}$	معلوم: $m\overline{BC} = a$
3- $\Delta CAD \longleftrightarrow \Delta CAB$ میں	3-
(i) $\overline{DC} \cong \overline{BC}$	(i) اوپر (2) میں ثابت کیا
(ii) $\overline{AD} \cong \overline{AB}$	(ii) عمل
(iii) $\overline{CA} \cong \overline{CA}$	(iii) مشترک
4- $\therefore\ \Delta CAD \longleftrightarrow \Delta CAB$	4- ض۔ض۔ض $\cong$ ض۔ض۔ض
5- $\therefore\ \angle CAD \cong \angle CAB$	5- مثلثوں کے تماثل کی رو سے
6- لیکن $m\angle CAD = 90^\circ$	6- عمل
7- $\therefore\ m\angle CAD = 90^\circ$	7- چونکہ $\angle CAB = \angle CAD$
8- پس ΔABC ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے	8- اس کا ایک زاویہ قائمہ ہے۔

فہوالمطلوب

مشق 8.24

1- مثلث کے اضلاع کی مقداریں دی گئی ہیں اس میں کون سا قائمۃ الزاویہ مثلث ہے اور کیوں؟

(i) 5cm, 4cm, 3cm (ii) 10cm, 8cm, 6cm

(iii) 13cm, 12cm, 5cm (iv) $(x^2 + y^2)$ اکائیاں ، $(2xy)$ اکائیاں ، $(x^2 - y^2)$ اکائیاں

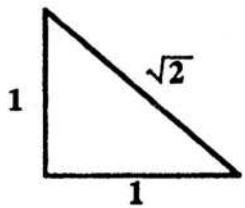
(v) 8, 7, 6 اکائیاں

2- 60 فٹ اونچی دیوار کے ساتھ 65 فٹ لمبی سیڑھی کا اوپر کا حصہ لگا ہوا ہے۔ سیڑھی کے نیچے کا حصہ دیوار سے کتنی دور ہے؟

3 - (الف) متماثل الاضلاع مثلث کے ہر ضلع کی لمبائی 6 اکائیاں ہے۔ مثلث کے ایک ارتفاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔
(ب) متماثل الاضلاع مثلث کے ہر ضلع کی لمبائی 2x اکائیاں ہے۔ مثلث کے ہر ارتفاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

4 - مسئلہ فیثا غورث کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل قطعات کھینچے۔
$\sqrt{13},\ \sqrt{17},\ \sqrt{5},\ \sqrt{2},$

(اشارہ: ہر عدد کو دو حصوں میں اس طرح توڑیے کہ ہر حصہ ایک مکمل مربع مثلاً $2=1^2+1^2$, $13=2^2+3^2$ وغیرہ پھر ان اضلاع اور ان کے درمیان قائمہ زاویہ لیتے ہوئے مثلث بنائے وتر $\sqrt{2}$ $\sqrt{13}$ وغیرہ ہوگی یعنی



5 - $\triangle ABC$ کے اضلاع $\overline{AC}$ اور $\overline{BC}$ پر P اور Q بالترتیب نقاط ہیں اور زاویہ قائمہ نقطہ C پر ہے ثابت کیجیے۔
$(m\overline{AQ})^2+(m\overline{AB})^2=(m\overline{AB})^2+(m\overline{AQ})^2$

6 - چوکور ABCD کے وتر زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کیجیے۔
$(m\overline{AB})^2+(m\overline{CD})^2=(m\overline{BC})^2+(m\overline{AD})^2$

7 - ثابت کیجیے کہ معین (*Rhombus*) کے اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ اس کے وتر کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

متفرق مشق VIII

1 - خالی جگہ پُر کیجیے۔
(i) دو مختلف نقاط ______ کا تعین کرتے ہیں۔
(ii) ہر خط کم از کم ______ مختلف نقاط رکھتا ہے۔
(iii) ہر مستوی کم از کم ______ غیر ہم خط نقاط پر مشتمل ہوتی ہے۔
(iv) دو متقاطع خطوط ایک ہی خط کے توازی نہیں ہو سکتے ______ کا اصول موضوعہ کہلاتا ہے۔
(v) متشابہ مثلثوں میں ______ متماثل ہوتے ہیں۔

(vi) کسی مثلث میں اس کے دو اضلاع کی مقداریں کا مجموعہ ہمیشہ ______ ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔

(vii) کسی خط کے باہر کسی نقطے سے ______ سب سے چھوٹا فاصلہ ہوتا ہے۔

(viii) ΔABC میں $m\angle B = 90^\circ$ تو $a^2 + c^2 =$ ______

(ix) کسی قائمہ مثلث میں ______ تمام اضلاع میں سب سے بڑا ہوتا ہے۔

(x) کسی مثلث کے ایک زاویے کا ______ اس کے متقابلہ ضلع کو ان اضلاع کی لمبائیوں کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جن کے درمیان زاویہ ہے۔

2 ۔ درست اور غلط بیانات کی نشاندہی کیجیے۔

(i) مثلث جس کے اضلاع کی لمبائیاں 6، 8 اور 10 اکائیاں ہیں قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

(ii) مثلث جس کے اضلاع 1cm ،2cm اور 3cm لمبے ہیں مثلث نہیں ہے۔

(iii) ΔABC میں $m\angle C = 90^\circ$ ہے تو $\angle A$ اور $\angle B$ سپلیمنٹری زاویے ہوتے ہیں۔

(iv) اگر دو مثلثیں متشابہ ہوں تو وہ ہمیشہ متماثل ہوتی ہیں۔

(v) اگر وتر کی لمبائی کا مربع دیگر دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے برابر ہے تو یہ قائمۃ الزاویہ مثلث متماثل الساقین ہو سکتی ہے۔

جوابات

مشق 1.1

1. (a) $\{3, 4, 5\}$; $\{x \mid x \in Z^+ \wedge 2 < x < 6\}$

(b) $\{5, 10, 15\}$; { y | y ∈ Z^+ ∧ جبکہ y 20 سے چھوٹا اور 5 سے تقسیم پذیر ہے }

(c) $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; $\{z \mid z \in N \wedge 4 < z < 12\}$

(d) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$; $\{t \mid t \in P \wedge 2 \leq t \leq 13\}$

2. $A = \emptyset$; $B = \{0\} \neq \emptyset$; $C = \emptyset$; $D = \emptyset$

3. (a) متناہی (b) متناہی (c) متناہی (d) غیر متناہی
(e) غیر متناہی (f) متناہی

4. $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$

5. (a) $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}$

(b) $A = \{a, b, c, d\}$ (c) $\{b\}; \{a, b, c\}$ (d) $\{a, b\}; \{a, b, d\}$

نوٹ: (c) اور (d) کے لیے ان سیٹوں کے علاوہ بھی سیٹ ہو سکتے ہیں۔

6. $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a, b, d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}$; $|P(A)| = 16$

7. جی ہاں، خالی سیٹ 8. ایسا سیٹ جس کا صرف ایک رکن ہو۔

9. $2^{10} = 1024$ 10. $\{x \in N \mid x + 7 = 0\}$

11. $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2,3\}$, $D = \{3\}$;

نوٹ: سوال 10 اور 11 کے لیے ان سیٹوں کے علاوہ بھی سیٹ ہو سکتے ہیں۔

12. (a) $A \sim B$ (b) $A \nsim B$ (c) $A \sim B$

مشق 1.2

(1)	{b,d,g}	(2)	{a,b,c}	(3)	{e,f}	(4)	{b}
(5)	{a,c}	(6)	{b}	(7)	U	(8)	ø
(9)	A	(10)	B	(11)	ø	(12)	U
(13)	ø	(14)	ø	(15)	A		

مشق 1.3

1. (i) {(a,y), (a,z), (b,y), (b,z), (c,y), (c,z), (d,y), (d,z)}

   (ii) {(y,a), (y,b), (y,c), (y,d), (z,a), (z,b), (z,c), (z,d)}

   (iii) {(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d)}

   (iv) {(y,y), (y,z),(z,y), (z,z)}

2. $x = 3$, $y = 1$

3. (i) {(a,2), (a,3), (a,4), (b,2), (b,3), (b,4)}

   (ii) {(a,2), (a,3), (b,2), (b,3), (a,4), (b,4)}

   (iii) {(a,3), (b,3)} (iv) {(a,3), (b,3)}

4. (i) {(a,2), (b,2)} (ii) {(a,4), (b,4)} (iii) {(a,2), (a,4), (b,2), (b,4)}

5. (i) {(1,4), (1,5), (3,4), (3,5)} (ii) {(2,2), (2,6),(4,2), (4,6)}

   (iii) {(2,2), (2,6),(4,2), (4,6)}

   (iv) {(1,2), (1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (3,2), (3,4) (3,5), (3,6),(4,4), (4,5)}

   (v) {(1,2), (1,6), (3,2), (3,6), (5,2), (5,6), (6,2), (6,6)}

   (vi) {(2,1), (2,4), (2,6), (2,8), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,6), (4,8), (5,2), (5,3), (5,6), (5,8), (6,1), (6,4), (6,6), (6,8), (8,1), (8,2), (8,3), (8,4)}

6. (i) $\{(a,x), (b,x)\}: \{(b,x), (b,y), (c,y)\}$

(ii) $\{(y,a), (y,c)\}; \{(x,a), (x,b), (x,c)\}$

(iii) $\{(a,a), (b,b)\}; \{(a,b), (a,c), (c,c)\} ; \{(b,a), (b,c), (c,a)\}$

نوٹ: (i) ، (ii) اور (iii) کے ان کے علاوہ دوسرے ربط بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

(iv) $\varnothing; \{(x,x)\};\{(y,y)\}; \{(x,y)\}; \{(y,x)\}; \{(x,x), (x,y)\}; \{(x,x), (y,x)\}; \{(x,x), (y,y)\};$
$\{(x,y), (y,x)\}; \{(x,y), (y,y)\}; \{(y,x), (y,y)\}; \{(x,x), (x,y), (y,x)\};$
$\{(x,x), (x,y), (y,y)\}; \{(x,x), (y,x), (y,y)\}; \{(x,y), (y,x), (y,y)\}$
$\{(x,x), (x,y), (y,x), (y,y)\}.$

7. $2^{12} = 4096$

8. (i) $\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ (ii) $\{(1,3), (2,2), (3,1), (4,0)\}$

(iii) $\{(1,0), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

(iv) $\{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$

9. Dom $R_1 = \{1,2, 3, 4\}$, Range $R_1 = \{2, 4, 6, 8\}$

Dom $R_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Range $R_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Dom $R_3 = \{ x \mid x \in N \wedge x \geq 9 \}$; Range $R_3 = N$

10. Range $R = \{-2, 0, 2, 4\}$ 11. Range $R = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,\ldots\}$

12. R_1 ایک۔ایک 'پر' تفاعل ہے اور R_2 ، R_3 ، R_4 تفاعل نہیں ہیں۔

13. $\varnothing$, $\{(0,0)\}$, $\{(0,1)\}$, $\{(1,0)\}$, $\{(1,1)\}$, $\{(0,0),(0,1)\}$, $\{(0,0),(1,0)\}$, $\{(0,0),(1,1)\}$, $\{(0,1),(1,0)\}$, $\{(0,1),(1,1)\}$, $\{(1,0),(1,1)\}$, $\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$, $\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, $\{(0,0), (1,0), (1,1)\}$, $\{(0,1), (1,0), (1,1)\}$, $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$,

16 مختلف روابط میں سے 8 روابط میں جوڑا (0, 1) موجود ہے۔

14. (a) $\{(1,1),(1,2), (1,3) (1,4),(2,2), (3,3)\}$ (b) $\{(1,1)\}$ (c) $\{(2,2), (3,3)\}$
(d) $\{(1,2), (1,3), (1,4)\}$ (e) $\{(1,2), (1,3), (1,4),(2,2), (3,3)\}$

15. f ایک 'پر' تفاعل ہے لیکن ایک۔ایک تفاعل نہیں ہے۔

16. r نہ تو ایک۔ایک تفاعل ہے اور نہ ہی 'پر' تفاعل ہے۔

17. (i) $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ (ii) $\{(1,2),(2,1),(3,3)\}$
(iii) $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ (iv) $\{(1,1),(2,3),(3,3)\}$

نوٹ: مطلوبہ شرائط کے مطابق ان کے علاوہ اور بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔

مشق 1.4

1. پہلا ربع $(1, 6), (\frac{1}{7}, \frac{4}{9}), (\frac{7}{2}, \frac{1}{2}), (3, 57)$

دوسرا ربع $(1-7, 3)$

تیسرا ربع $(-7, -\frac{3}{2}), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1.7), (-1, -11)$

چوتھا ربع $(\sqrt{3}, -4), (\sqrt{2}, -\sqrt{3}), (\sqrt{5}, -6.54), (27, -72), (1.7, -2.7), (\sqrt{3}, -1.3)$

3. $A \times B = \{(2, -5), (2, -4), (3, -5), (3, -4), (4, -5), (4, -4), (5, -5), (5, -4)\}$

$B \times A = \{(-5, 2), (-5, 3), (-5, 4), (-5, 5), (-4, 2), (-4, 3), (-4, 4), (-4, 5)\}$

$A \times A = \{(2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$

متفرق مشق I

1. (a) $\{-1, 1\}$ (b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

2. $B \subseteq A$, $C \subseteq A$, $C \subseteq D$.

3. (a) نہیں (b) جی ہاں (c) نہیں (d) جی ہاں

4. (a) $\{(a,y), (a,z), (b,y), (b,z), (c,y), (c,z), (d,y), (d,z)\}$

(b) $\{(y,a), (y,b), (y,c), (y,d), (z,a), (z,b), (z,c), (z,d)\}$

(c) $\{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d)\}$

(d) $\{(y,y), (y,z), (z,y), (z,z)\}$

5. (i) پہلا ربع (ii) تیسرا ربع

6. (a) $y = 0$ (b) $x = 0$

7. (a) $R_1 = \{(-1,\frac{1}{2}), (-1,\frac{1}{3})\}$, $R_2 = \{(-1,\frac{1}{3}), (1,\frac{1}{2}), (1,\frac{1}{3})\}$

(b) $R_1 = \{(\frac{1}{2},-1)\}$, $R_2 = \{(\frac{1}{2},-1), (\frac{1}{2},1)\}$, $R_3 = \{(\frac{1}{2},-1), (\frac{1}{3},-1)\}$

نوٹ: ان مثالی روابط کے علاوہ دوسرے روابط بھی لکھے جا سکتے ہیں

(c) $\emptyset$, $\{(-1,1)\}$, $\{(-1,-1)\}$, $\{(1,-1)\}$, $\{(1,1)\}$, $\{(-1,-1),(-1,1)\}$, $\{(-1,-1),(1,-1)\}$, $\{(-1,-1),(1,1)\}$, $\{(-1,1),(1,-1)\}$, $\{(-1,1),(1,1)\}$, $\{(1,-1),(1,1)\}$, $\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1)\}$, $\{(-1,-1),(-1,1),(1,1)\}$, $\{(-1,-1),(1,-1),(1,1)\}$, $\{(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$, $\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$

(d) $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$, $\{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})\}$, $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{3})\}$, $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{1}{3})\}$

نوٹ: ان روابط کے علاوہ دوسرے روابط بھی لکھے جا سکتے ہیں

8. (a) $\{(1,\frac{1}{2}), (2,\frac{1}{6}), (3,\frac{1}{4}), (4,\frac{1}{8})\}$

(b) $\{(1,\frac{1}{8}), (2,\frac{1}{4}), (3,\frac{1}{2}), (4,\frac{1}{6})\}$

(c) $\{(1,\frac{1}{4}), (2,\frac{1}{8}), (3,\frac{1}{2}), (4,\frac{1}{6})\}$

(d) $\{(1,\frac{1}{2}), (2,\frac{1}{2}), (3,\frac{1}{4}), (4,\frac{1}{4})\}$

نوٹ: ان تفاعل کے علاوہ دوسرے تفاعل بھی لکھے جا سکتے ہیں

9. (a) $\emptyset$ (b) $\{a,e\}$ (c) $\{a,e\}$ (d) $\{b,c,d,f\}$

(e) $\{a, e\}$

(f) $\{g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$

10. (i) غلط (ii) غلط (iii) غلط (iv) صحیح (v) غلط
(vi) غلط (vii) غلط (viii) غلط (ix) غلط (x) صحیح

11. (i) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (ii) $x \in A$ or $x \in B$ but $x \notin A \cap B$
(iii) $\neq$ (iv) $A' \cap B'$ (v) 2 ; 3 (vi) =
(vii) تیسرے (viii) مساوی (ix) نقطہ (x) $\{1,2,3\}; \{2,3,4\}$

12. (i) $A \times B$ (ii) $\{x | x \in E, 2 \le x \le 50\}$ (iii) مکمل اعداد
(iv) ایک۔ایک پر

مشق 2.1

1. (i) جمع کی خاصیت مبادلہ
(ii) جمع کی خاصیت تلازم (iii) جمعی ذاتی عنصر
(iv) جمع کی خاصیت تلازم (v) جمعی معکوس
(vi) جمعی معکوس (vii) ضرب کی خاصیت مبادلہ
(viii) ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع
(ix) ضربی معکوس
(x) ضرب کی خاصیت تلازم (xi) جمعی معکوس

2. (i) جمعی خاصیت $\forall x, y, z \in R, x < y \Rightarrow x + z < y + z$
(ii) ضربی خاصیت $\forall x, y, z \in R$, if $z < 0, x < y \Rightarrow x z > y z$
(iii) جمعی خاصیت $\forall x, y, z \in R, x < y \Rightarrow x + z < y + z$
(iv) ضربی خاصیت $\forall x, y, z \in R$, if $z < 0, x < y \Rightarrow x z > y z$
(v) ضربی خاصیت $\forall x, y, z \in R$, if $z < 0, x > y \Rightarrow x z < y z$
(vi) ضربی خاصیت $\forall x, y, z \in R$, if $z < 0, x < y \Rightarrow x z > y z$
(vii) ضربی خاصیت $\forall x, y, z \in R$, if $z < 0, x > y \Rightarrow x z < y z$
(viii) ضربی خاصیت $\forall x, y, z \in R$, if $z < 0, x > y \Rightarrow x z < y z$

3. (i) $\{0, -1\}$ میں خاصیت بندش بلحاظ جمع وضرب موجود نہیں ہے
(ii) $\{0\}$ میں خاصیت بندش بلحاظ جمع وضرب موجود ہے
(iii) $\{1\}$ میں خاصیت بندش بلحاظ ضرب موجود ہے جبکہ خاصیت بندش بلحاظ جمع موجود نہیں ہے۔

مشق 2.2

1.

	اساس	قوت نما
(i)	7	15
(ii)	-189	10
(iii)	108	64

2. (i) مثبت (ii) منفی (iii) مثبت

3. (i) غلط (ii) درست طریقہ

4. 91^4 5. 5^6 6. a^{15} 7. $a^6 b^3 c^5$

8. $8^4 \times 3^4$ 9. $4^3 \times 5^3$ 10. $a^{13} b^{13}$ 11. $3^5 y^5$

12. $3^{14} 5^{14} x^{14} y^{14}$

مشق 2.3

1. 1000000 2. 64 3. 6561 4. 16 5. 243

6. 16 7. a^7 8. $2a^2 b^4$ 9. $-7x^4 y^4$

10. $(m+n)(p+q)^3$ 11. $5(2p-3q)^3(4-3r)^2$

12. $2(2l+3m)^2(4n-2p)^2$ 13. $(6a+b)^2(3c+d)^3(5e-f)$

مشق 2.4

1. $\frac{1}{4096}$ 2. $-\frac{12^5}{5^5}$ 3. $\frac{a^6}{b^6}$ 4. $\frac{m^3}{l^3}$

5. $\frac{9c^2d^2}{64a^4b^2}$ 6. $\frac{81x^{12}y^8}{16u^4t^4}$ 7. $\frac{64a^{12}b^{18}c^{24}}{729l^{12}v^6w^{18}}$

8. $\frac{289b^{14}c^{10}}{49x^6y^4}$ 9. $\frac{27x^{12}y^9z^6}{a^3b^6c^{15}}$ 10. $36x^{14}y^{12}$

11. $\frac{x^5y^5z^5}{243a^{25}b^{10}c^{30}}$ 12. $4m^4n^2p^2$

مشق 2.5

1. 13 2. $6\sqrt{5}$ 3. 12 4. $8\sqrt{3}$
5. $7\sqrt{6}$ 6. $\sqrt{3}$ 7. 1 8. $\sqrt{18}$
9. 4 10. $11\sqrt{5}$ 11. $6\sqrt{2}$ 12. $72\sqrt{23}$

مشق 2.6

	1	2	3	4	5
مجذور	35	$\frac{xyz}{t}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{p}{q}$	$\frac{3xyz}{ut}$
اشاریہ	4	5	6	n	5

6. 3 7. 5 8. ab 9. $\frac{5}{7}$ 10. mn
11. $\frac{3\sqrt[3]{3}}{5}$ 12. $\sqrt[mn]{q^{m-n}}$ 13. $4ab$ 14. $\frac{2ab^3}{3c^2d^6}$

مشق 2.7

1. 12 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{16}{x}$ 4 $\frac{3z}{x^2}$
5. $\frac{3^{3n}}{2^{\frac{4}{2}}}$ 6. 1 7. 1 8. 1
9. 1 10. $3\frac{1}{8}$ 11. 15 12. $1\frac{1}{5}$
13. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 14. 4

مشق 2.8

1. (i) $2-\sqrt{3}$ (ii) $3+2\sqrt{2}$ (iii) $5-2\sqrt{6}$
2. 4 ; 14 3. 6 ; 34 4. $2\sqrt{2}$; 10
5. $2\sqrt{5}$; -4 ; $-8\sqrt{5}$ 6. $2\sqrt{10}$; 6; $12\sqrt{10}$ 7. 194 ; $-112\sqrt{3}$

8. 194   9. 322   10. (*a*) 98 (*b*) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

11. تیسرا، چوتھا، تیسرا، چوتھا، تیسرا

متفرق مشق II

1. (a) (i) خاصیت بندش ہے (ii) خاصیت بندش نہیں ہے (iii) خاصیت بندش ہے (iv) خاصیت بندش نہیں ہے
   (b) (i) خاصیت بندش ہے (ii) خاصیت بندش ہے (iii) خاصیت بندش ہے (iv) خاصیت بندش نہیں ہے
   (c) (i) خاصیت بندش ہے (ii) خاصیت بندش ہے (iii) خاصیت بندش ہے (iv) خاصیت بندش نہیں ہے
   (d) (i) خاصیت بندش ہے (ii) خاصیت بندش ہے (iii) خاصیت بندش ہے (iv) خاصیت بندش نہیں ہے
   (e) (i) خاصیت بندش ہے (ii) خاصیت بندش ہے (iii) خاصیت بندش ہے (iv) خاصیت بندش نہیں ہے
   (f) (i) خاصیت بندش نہیں ہے (ii) خاصیت بندش نہیں ہے (iii) خاصیت بندش ہے (iv) خاصیت بندش نہیں ہے
2. (i) ضربی خاصیت (ii) ضربی خاصیت
   (iii) ضربی خاصیت (منفی عدد)
   (iv) ضربی خاصیت
3. (i) صحیح (ii) صحیح (iii) غلط (iv) غلط
   (v) غلط (vi) غلط (vii) صحیح
4. (i) $\frac{1}{6561}$ (ii) $\frac{a^3}{b^6}$ (iii) a^{12} (iv) 8^{24}
   (v) $-x^9$ (vi) $-\frac{m^3}{t^3}$
5. (i) 15 (ii) 42 (iii) 42
6. (i) 8 (ii) $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$
7. (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح
   (iv) غلط (v) صحیح
8. (i) 1 (ii) 1 (iii) 1
9. (i) $\sqrt{10}-3$ (ii) $-\frac{1}{2}(4-3\sqrt{2})$ 10. 34
11. (i) $\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ (ii) $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)^2$ (iii) $\frac{2\sqrt{4-x^2}}{x^2}$

مشق 3.1

1. 6.875×10^{1}
2. 5.373458×10^{3}
3. 7.56837×10^{5}
4. 5.3×10^{-2}
5. 7.689×10^{-4}
6. 7×10^{6}
7. 8.9×10^{7}
8. 1.5×10^{-8}
9. 25760000
10. 0.000000070056
11. 0.0000000013
12. 10000000000000
13. 3.5×10^{8} cm
14. 1.5×10^{7}

مشق 3.2

1. $\log_2 32 = 5$
2. $\log_2 \frac{1}{128} = -7$
3. $\mathrm{Log}_{10}\ 0.01 = -2$
4. $\log_{36} 216 = \frac{3}{2}$
5. $\log_{10} 100000 = 5$
6. $5^{2} = 25$
7. $27^{\frac{4}{3}} = 81$
8. $2^{-3} = \frac{1}{8}$
9. $10^{0} = 1$
10. $10^{-3} = 0.001$
11. $\frac{1}{2}$
12. $\frac{1}{8}$
13. 0.0001
14. 9
15. 125
16. 0، صفر سے بڑا کوئی بھی مثبت حقیقی عدد
17. 4
18. 2
19. 1
20. 6
21. 2
22. $\frac{4}{3}$
23. $\frac{7}{3}$
24. $\frac{-4}{3}$
25. $\frac{2}{3}$

مشق 3.3

1. $3\log_a x + \log_a y - 2\log_a z$
2. $\frac{1}{2}\log_a x + \log_a y + \frac{1}{2}\log_a z$
3. $-\frac{7}{12}\log_a x - \log_a y$
4. $-\frac{2}{3}\log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{2}{3}\log_a z$
5. $-5\log_a z$
6. $\frac{11}{30}\log_a x + \frac{2}{15}\log_a y + \frac{1}{10}\log_a z$
8. 0
9. $\log_a(x^2-1)$

مشق 3.4

1.	0.9542	2.	0.6532	3.	1.8920	4.	0.7543
5.	1.0752	6.	3.8375	7.	0.9034	8.	3.7787
9.	$\bar{1}.8383$	10.	$\bar{2}.5378$	11.	$\bar{3}.3707$	12.	$\bar{2}.7829$
13.	4.8450	14.	$\bar{1}.9330$	15.	2.4043		

مشق 3.5

1.	56.30	2.	4.581	3.	163.4	4.	79.60
5.	1.002	6.	7087	7.	0.4104	8.	0.05994
9.	0.002221	10.	0.0007006	11.	0.000006074		
12.	0.000000004869	13.	3020	14.	0.0000001009		

مشق 3.6

1.	38.7	2.	23.81	3.	0.03835	4.	78.66
5.	6.776	6.	1.373	7.	8.98	8.	12.1
9.	469.8	10.	122.3	11.	4	12.	10
13.	46	14.	46	15.	48		

متفرق مشق III

1. (i) 4.52×10^{3} (ii) 2.6517×10^{1} (iii) 2.3×10^{-3}
(iv) 1.082×10^{-5} (v) 1.30216×10^{-2}

2. (i) 7210 (ii) 0.00000000721 (iii) 5012000

3. (i) $\log_3 27 = 3$ (ii) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ (iii) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$
(iv) $\log_{10} 0.001 = -3$

4. (i) 3 (ii) 4 (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) 3 (v) 3

5. (i) 2 (ii) 9 (iii) $\sqrt{8}$ (iv) $\sqrt[5]{125}$

6. (i) 2.2175 (ii) $\bar{3}.5403$ (iii) 2.5225
(iv) 3.8174 (v) 1.3728

7. (i) 207 (ii) 1.051 (iii) 0.2070
(iv) 0.04677 (v) 44.19

8. (i) 1.3802 (ii) $\bar{2}.7993$ (iii) 2.9994
(iv) 5.1474 (v) 1.9085

9. (i) ص (ii) غ (iii) ص (iv) غ (v) غ

10. (i) c (ii) c (iii) b (iv) b (v) d

مشق 4.1

1. (i) کثیررقمی (ii) کثیررقمی (iii) ناطق اظہاریہ
(iv) کثیررقمی (v) کثیررقمی (vi) ناطق اظہاریہ
(vii) ناطق اظہاریہ (viii) کثیررقمی (ix) غیر ناطق اظہاریہ

2. (i) غیرکثیررقمی (ii) کثیررقمی ;2 (iii) کثیررقمی ; 3
(iv) غیرکثیررقمی (v) کثیررقمی ; 1 (vi) غیرکثیررقمی
(vii) کثیررقمی ;1 (viii) کثیررقمی ; 3 (ix) کثیررقمی ;1

3. (i) دورقمی (ii) دورقمی (iii) سہ رقمی (iv) سہ رقمی
(v) دورقمی (vi) یک رقمی (vii) یک رقمی (viii) دورقمی

4. (i) دو (ii) پانچ (iii) صفر (iv) چار (v) چھ
(vi) تین (vii) سات (viii) صفر (ix) دو

مشق 4.2

1. (i) $4ay^2 - 5a^2y^3 + 2a^3y$ (ii) $3x^2 - ay^2 + 4a^2z^2 - 2a^4$
(iii) $x^2 + 4ay^2 + 2a^2xy - 2a^3x^3 - 5a^4$
(iv) $2 - 3x^3a + 4x^2a^3 + a^4z^6 - \frac{1}{4}a^5$
(v) $\frac{1}{3}xyz - \frac{1}{2}a + \frac{2}{5}a^2 - \frac{3}{7}a^4$

2. (i) $x^3 + x^2 - 2x - 1$ (ii) $-5y^5 + y^3 - 4y^2 + y - 7$
(iii) $t^6 - \frac{2}{3}t^3 - t + \frac{3}{4}$ (iv) $z^5 + z^3 + 2z - \frac{1}{3}$
(v) $5y^4 + 4y^3 - 2y + 7$ (vi) $y^4 + 4y + 6 + \frac{4}{y^2} - \frac{12}{y^3} + \frac{9}{y^4}$
(vii) $x^2 + 4x - 10 + \frac{12}{x} - \frac{9}{x^2}$ (viii) $4y^4 - 32y^2 - 96 - \frac{128}{y^2} - \frac{64}{y^4}$
(ix) $a^4 + 4a^2 - 6 + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^4}$ (x) $4x^4 - 4x^2 + 9 - \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^4}$

مشق 4.3

1. (i) 17 (ii) 114 (iii) 4 (iv) $-\frac{9}{1151}$ (v) $-4\frac{4}{9}$
(vi) $-10\frac{2}{3}$

2. 5 3. 75 4. 40 5. 40

مشق 4.4

1. (i) $2ab - 5bc + b^2$ (ii) $x^2 - 4x$ (iii) $2a^2 - 4ab - 2b^2 - 2$
2. (i) $-7x^5 + x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 6$ (ii) $-2a^4 + 14a^3b - 14a^2b^2 + 7$
(iii) $x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 16y - 9z + 10t$
3. $-2a^4 + 2a^3b + 4a^2b^2 - ab^3 - 5b^3$ 4. $-51x^3 - 23x^2 + 37x + 9$

5. $6x^3 + 3x + 7y$ 6. $2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3a$

7. (i) $a\sqrt{a} + b\sqrt{b}$ (ii) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ (iii) $x^5 - y^5$

8. (i) $5x - y$ (ii) $x + 3$ (iii) $a^2 + ab - b^2$

9. 51 10. $4x^2 - 2x + 1$ 11. $k = 12 - a$ 12. 24

مشق 4.5

1. (i) -1 (ii) -3 (iii) 75

2. (i) صحیح (ii) صحیح (iii) صحیح (iv) غلط

مشق 4.6

1. $a^4b^4c^4 - d^8$ 2. $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy$ 3. $256 - x^{24}$

4. $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab + 2cd$ 5. $x^4 - y^4$ 6. 11449

7. 4489 8. 1218816 9. 7921 10. 978121

مشق 4.7

1. (i) 10 (ii) 75 (iii) 53 (iv) 50

2. (i) 56 (ii) 15 3. (i) 0 (ii) -1040

4. (i) ± 1 (ii) ± 3

5. (i) $9+6\sqrt{2}$ (ii) 7 (iii) 7 (iv) 2207 (v) 47

مشق 4.8

1. (i) $x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 6xy + 12yz + 4xz$

(ii) $16x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 24xy - 30yz + 40xz$

(iii) $49x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 28xy + 12yz - 42xz$

(iv) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{4}{9}b^2 + \frac{9}{16} - \frac{2}{3}ab - b + \frac{3}{4}a$

2. (i) 3 (ii) 3 (iii) 110 (iv) 4 (v) 0 (vi) 50

مشق 4.9

1. (i) $27x^3+108x^2+144x+64$ (ii) $125x^3+150x^2y+60xy^2+8y^3$

(iii) $64a^3+144a^2b+108ab^2+27b^3$ (iv) $x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$

(v) $27x^3-9\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^2}-\frac{1}{27y^3}$ (vi) $\frac{x^3}{y^3}+\frac{3x}{y}+\frac{3y}{x}-\frac{y^3}{x^3}$

2. (i) -5 (ii) 396 (iii) 4 (iv) 18 (v) 76

(vi) 135 (vii) 207

مشق 4.10

1. $y^3+\frac{1}{y^3}$ 2. $x\sqrt{x}-y\sqrt{y}$ 5. $l^3+m^3+8n^3+6lmn$

6. $8x^3+27y^3+64z^3-72xyz$ 7. 45 8. -20 9. -140

متفرق مشق IV

1. (i) کثیر رقمی (ii) ناطق اظہاریہ (iii) کثیر رقمی

(iv) غیر ناطق اظہاریہ (v) کثیر رقمی

(vi) ناطق اظہاریہ (vii) کثیر رقمی (viii) کثیر رقمی

2. (a) دو (b) دو (c) تین (d) تین (e) ایک (f) تین

3. (a) x کا عددی سر 1 ، y کا عددی سر 1 ، مستقل رقم $-\frac{1}{2}$

(b) x کا عددی سر -3 ، y کا عددی سر $-1\frac{1}{2}$ ، y^2 کا عددی سر -3 ، مستقل رقم 6

(c) x^2 کا عددی سر $\frac{1}{4}$ ، y کا عددی سر $-\sqrt{3}$ ، z^2 کا عددی سر 2 ، مستقل رقم -1

(d) xyz کا عددی سر 2 ، مستقل رقم $-k$

4. (a) 1 (b) 3 (c) 3 (d) صفر (e) 3 (f) 1

5. (i) 12 (ii) -2 (iii) -25 (iv) 35 6. -36

7. (i) $49a^2 - 25$ (ii) $9b^2$ (iii) $12ab$

(iv) $27a^9 + 27a^6b^3 + 9a^3b^6 + b^9$ (v) $3p^2q$; $3pq^2$

(vi) $4a^4 + 25y^4 + 9z^2 - 20a^2y^2 + 30y^2z^2 - 12a^2z^2$

(vii) $7x$ (viii) $24lm^2$

8. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$; $x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$ 9. 50,000

10. $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + \frac{9}{4}z^2 - \frac{1}{3}xy + yz - \frac{3}{2}xz$ 11. -124

12. (i) سرزی (ii) 3 (iii) $-5a^2y^3 + 4ay^2 + 2a^3y$

(iv) 1 (v) 1 (vi) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$

(vii) $x^2 - 10x + 24$ (viii) 4 (ix) $x - y$ (x) $x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$

مشق 5.1

1. $3t^{2n}\ (1 - \frac{2}{t^3} + \frac{3}{t^5})$ 2. $3(a+3)(x-2)(2x+a-1)$

3. $(ab + cd + ac - bd)(ab + cd - ac + bd)$ 4. $xy\,(2x - 3y)(x^2 + y^2)$

5. $abc\,(a + b)(a^2 + b^2)$ 6. $q\,(p + r)(al + bm + cn)$

7. $(ac + 2)^2$ 8. $(xy^2 + 9)^2$ 9. $(a - b + 9)^2$ 10. $(m^n t^n + 4z^n)^2$

11. $(xy + 0.05)^2$ 12. $(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y^2)^2$ 13. $(ab - 3)^2$

14. $(xyz - 2)^2$ 15. $(x^2y - \frac{1}{x^2y})^2$ 16. $(a^2 - 0.2)^2$ 17. $\{3-(a - 3b)^2\}^2$

18. $(25 - a^2b)^2$ 19. $a\,(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{4})$

20. $(a^2b^3 - 12c)(a^2b^3 + 12c)$ 21. $(a - b - 3c)(a - b + 3c)$

22. $(s^n - t^n)(s^n + t^n)$ 23. $(a - b + c + d)(a - b - c - d)$

24. $(7y - x)(y + 5x)$ 25. $(x + 12)(x + 3)$ 26. $(x + 20)(x - 5)$

27. $(z^2 - 5)(z^2 + 3)$ 28. $(r - 2)(r^2 + 2r + 4)(r^3 - 2)$

29. $(ax^2 - 24y^2)(ax^2 + 4y^2)$ 30. $(a + b + 18)(a + b + 2)$

مشق 5.2

(i) $(a-b-1)(a+b-1)$ (ii) $(1-x+y)(1+x-y)$ (iii) $(y-z)(y+z)^3$

(iv) $(2a-3b-\frac{1}{2})(2a+3b-\frac{1}{2})$ (v) $(x-y-\frac{1}{2})(x+y-\frac{1}{2})$

(vi) $(a-b+3c)(a+b+3c)$ (vii) $(x^2+y^2+z^2-2xy)(x^2+y^2+z^2+2xy)$

(viii) $(x+y-7z)(x+y+7z)$ (ix) $(s+t-4)(s-t+4)$

(i) $(2a^2\quad 10ab+25b^2)(2a^2+10ab+25b^2)$

(ii) $(1-2b+2b^2)(1+2b+2b^2)$ (iii) $(a^2-a+1)(a^2+a+1)$

(iv) $(a^4-a^2+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$

(v) $(8x^4-4x^2y^2+y^4)(8x^4+4x^2y^2+y^4)$

(vi) $(r^2-2rs+2s^2)(r^2+2rs+2s^2)$

(vii) $(4a^2-5ab-9b^2)(4a^2+5ab-9b^2)$

(viii) $(3x^2-2xz-4z^2)(3x^2+2xz-4z^2)$ (ix) $(x+y+z)(x-y-z+1)$

مشق 5.3

(i) $(2a-1)(a+1)$ (ii) $(3a-2)(2a+5)$ (iii) $(5b-2)(5b-1)$

(iv) $(4x-3)(3x-1)$ (v) $(x-3)(5x+2)$ (vi) $(6y-5)(3y+4)$

(i) $(3x-9)(8x-3)$ (ii) $(18x-4)(2x+9)$ (iii) $7(y+1)(y-3)$

(i) $xy^2z(2+x)(3-2x)$ (ii) $-(3x^n+1)(x^n-4)$

(iii) $(2x^ny^n-1)(3x^ny^n+5)$

(i) $(2s-2t-1)(s-t+1)$ (ii) $(5s+5t-2)(5s+5t-1)$

(iii) $\{5(2x+y)^2+2\}\{(2x+y)^2-3\}$ (iv) $\{3(x-2y)^2-2\}\{4(x-2y)^2-1\}$

مشق 5.4

(i) $(2a+3y)(4a^2-6ay+9y^2)$ (ii) $(xy^2+2z)(x^2y^4-2xy^2z+4z^2)$

(iii) $(x^2+4t)(x^4-4x^2t+16t^2)$ (iv) $2(x+y^2)(x^2-xy^2+y^4)$

(v) $t^2(t+y)(t^2-ty+y^2)$ (vi) $\frac{1}{3}xy(x+\frac{1}{3}y)(x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2)$

2. (i) $(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$ (ii) $(2x-3y^2)(4x^2+6xy^2+9y^4)$
(iii) $2(x-5t)(x^2+5xt+25t^2)$ (iv) $y^2(y-z)(y^2+yz+z^2)$
(v) $\frac{1}{3}ab(\frac{1}{3}a-b)(\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{3}ab+b^2)$ (vi) $(abc-\frac{1}{abc})(a^2b^2c^2-1+\frac{1}{a^2b^2c^2})$

3. (i) $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
(ii) $(xy-\frac{2}{z})(xy+\frac{2}{z})(x^2y^2+\frac{2xy}{z}+\frac{4}{z^2})(x^2y^2-\frac{2xy}{z}+\frac{4}{z^2})$
(iii) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
(iv) $(x^2+4y^2)(x^4-4x^2y^2+16y^4)$
(v) $(a^2+b^3y^3)(a^4-a^2b^3y^3+b^6y^6)$ (vi) $a(x^4+y^4)(x^8-x^4y^4+y^8)$

4. (i) $(a+1)(a^2-2a+2)$ (ii) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2-1)$
(iii) $(a-1)(a-2)(a^2+a+1)(a^2+2a+4)$
(iv) $(2x-1)(x+1)(4x^2+2x+1)(x^2-x+1)$
(v) $(x-2y-4z)(x^2+4y^2+16z^2-4xy-4xz-8yz)$
(vi) $(5r-s-at)(25r^2+s^2+a^2t^2+5rs+2at+5art)$
(vii) $r^2t^2(r+t^2)(r^2-rt^2+t^4)$

مشق 5.5

1. $(a-2b+3c)(a^2+4b^2+9c^2+2ab+6bc-3ac)$
2. $(a^2-3b-2c^2)(a^4+9b^2+4c^4+3a^2b-6bc^2+2a^2c^2)$
3. $(3x-1+2y^2)(9x^2+1+4y^4+3x+2y^2-6xy^2)$
4. $(4y^2+\frac{4}{y^2}-2y^3)(16y^4+\frac{16}{y^4}+4y^6-16+8y+8y^5)$
5. 0 6. $2x(x^2+3y^2+3z^2+3xy+3yz+3zx)$
7. $(a+1+\frac{1}{a})(a^2+\frac{1}{a}-a-\frac{1}{a})$

مشق 5.6

1. $(x-y)(y-z)(x-z)$ 2. $(r-s)(s-t)(r-t)$
3. $(a-b)(a+b)(b-c)(b+c)(a-c)(a+c)$
4. $(x-y)(x+y)(y-z)(y+z)(x-z)(x+z)$
5. $(2a-3b)(3b-4c)(2a-4c)$ 6. $(x-3y)(3y-5z)(x-5z)$

مشق 5.7

1. $(x-1)(x^2+2x+2)$
2. $(x-2)(x^2+5x+14)$
3. $(x-2)(x-3)(x+4)$
4. $(x+1)(x+2)(x+4)$
5. $(x-1)(x-4)(x+5)$
6. $(x-1)^2(x-2)$
7. $(x-1)(x-2)(x+3)$
8. $(x+3)(x^2-3x+4)$
9. $(x-2)(x-3)(x-6)$
10. $(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+3)$

مشق 5.8

1. $5a^2$
2. $a^5b^3c^2$
3. $x-y$
4. $x^4+x^2y^2+y^4$
5. $x-1$
6. $2(x^2+3x+9)$
7. $2x^2+2x-4$
8. $y+2$
9. $6x-5y$
10. $9x+27$

مشق 5.9

1. $x-y$
2. $x-1$
3. $x+2$
4. $(x+y)^2$
5. $y+2$
6. $x+2y$
7. $x+1$
8. $6x-5$
9. $x+y+a$

مشق 5.10

1. $240\,a^2x^3y^3$
2. $(x+y+z)(x-y-z)(y-z-x)$
3. $(x+1)(x+2)(x+3)(x^2-2x+26)$
4. $a^{12}-b^{12}$
5. $(3x+1)(2x+3)(x-4)$
6. x^6-y^6
7. $(x-1)(x+1)(2x+3)^2(6x-1)$
8. $(x-1)(x^3+x^2+x-14)(x^3+x^2+x-21)$
9. $12x^2(x-4)(x-2)(x+7)$
10. $(1-x)(1+x)(1+x-x^4)$
11. $x^2-7x+12$
12. $x^2-12x+35$
13. $6x^2+x-2$
14. $3x^2+4x-4\,;\;3x^2+x-2$
15. $x^3+3x^2+7x+10\,;\;x^3+4x-5$

مشق 5.11

1. $\frac{a+1}{a+3}, a \neq -3$
2. $\frac{4(3a-11)}{(a-5)(a-1)(a+1)}, a\neq 5, 1, -1$
3. $\frac{10b^2+18b+36}{b^3-8}, b\neq 2$
4. $\frac{3xy-x^2}{x^3+y^3}, x^3+y^3\neq 0$
5. $\frac{1-2b}{4a^2-b^2}, 4a^2-b^2 \quad 0$
6. $\frac{z^2-y^2-x^2-xy+yz+xz}{(y-z)(z-x)}, x\neq y\neq z$
7. $\frac{8x^3+84x^2+256x+204}{(x+6)(x+3)(x+2)(x+5)}, x\neq -6, -3, -2, -5$
8. $\frac{2y^2(x-z)}{(x+y)(y+z)}, x+y\neq 0, x+z\neq 0, y+z \quad 0$
9. $\frac{x+2y-9z}{x+2y+3z}$
10. (i) $\frac{1}{a+b}, a+b\neq 0$ (ii) $\frac{y-1}{y+1}, y\neq -1$
(iii) $\frac{2}{(x^2-y^2)}, x^2-y^2\neq 0$ (iv) $\frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+4y^2}$ (v) 1 (vi) $-\frac{y-z}{y+z}$
$2y^2(x-z)$
11. (i) $\frac{x+2y}{x+3y}, x+3y\neq 0$ (ii) $a+b$ (iii) 1
(iv) $-\frac{(x-1)^2}{x^2(x-4)(x+5)}, x\neq 0, 4$ 12. (i) $\frac{a-2b}{a}, a\neq 0$ (ii) 1 (iii) $\frac{2x(x-y)}{y^2}, y\neq 0$

مشق 5.12

1. $-\frac{x^3}{y^3}$ 2. 0 3. $\frac{x(16x^3+16x^2+12x-2)}{1-x}$ 4. 1
5. $\frac{2x^2}{x+y}, x+y^{1\cdot}0$

مشق 5.13

1. $5x^3 + 2y^2$
2. $7x + 14y + 2z^2$
3. $\frac{2x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}$
4. $\frac{x^2y^3}{3} + \frac{4x}{y^3}$
5. $a - \frac{1}{a} - 2$
6. $y - \frac{1}{y} - 5$
7. $y - \frac{1}{y} - 2$
8. $y^2 + \frac{1}{y^2} + 1$
9. $(y-4)(y-5),(y-3)$
10. $2x^2y^2$
11. $(x+5)(x+8)(x-4)$
12. $x + \frac{y}{4} - z$
13. $\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + 1$
14. $\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} + 1$

مشق 5.14

1. $2a^2 - 2a + 1$
2. $a^2 + 5a + 3$
3. $\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{y^2}{x^2}$
4. $y^2 + \frac{1}{y^2} + 1$
5. $a^2 + 4 + \frac{1}{a^2}$
6. $y^2 + 2 - \frac{1}{y^2}$
7. $x^2 + 2 - \frac{1}{x^2}$
8. $x^2 - z + \frac{y^2}{4}$
9. -4
10. $-2x + 2$
11. $p = 2$
12. $q = 16$
13. $p = 24, q = 16$
14. $p = 12, q = 16$
15. $\frac{x - \frac{1}{x} - 2}{y + \frac{1}{y} - 2}$
16. $\frac{2x^2 + 3x + 4}{b^2 - \frac{1}{b^2} - 4}$

متفرق مشق V

1. (i) $d^{n+1}(1 - d^{2n} - d^{4n+1})$ (ii) $(r-2y)(r+2y)(r^2+4y^2)(r^4+16y^4)$

(iii) $(1+2x)^2$ (iv) $[(x+2y)^n+9]^2$ (v) $(t^2-0.05)^2$

(vi) $9(a^{2n} - 2x^n z^{2n})(a^{2n} + 2x^n y^{2n})$ (vii) $(3n^{2x} - 11m^{2y})(3n^{2x} + 11m^{2y})$

(viii) $(a^3-5)(a^3+3)$ (ix) $-(5x^2+8y^2)(2x^2-3y^2)$

(x) $(2r-s)(2r+s)(4r^2+2rs+s^2)(4r^2-2rs+s^2)$

2. (i) $(rs-yz)(rs+yz)(r^2s^2+y^2z^2)(r^2s^2+rsyz+y^2z^2)$
$(r^2s^2-rsyz+y^2z^2)(r^4s^4-r^2s^2y^2z^2+y^4z^4)$
(ii) $(x^2y^2+1)(x^2y^2-2)$
(iii) $(7y^2-4z^2)(49y^4-28y^2z^2+16z^4-1)$ (iv) $(a^3+\frac{2}{3}a+\frac{1}{7})^2$

3. (i) $(a-1)(a+1)(a^2+3)(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})$ (ii) $(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})(2a^4+a^2+2)$

4. $x-3$ 5. $x^2-2x-15$ 6. -1 7. $a=6,\ b=16$

8. (i) $2ab(a+b-5c)$ (ii) $(a-b)(a+b)$
(iii) $(xy-1)(xy+2)$ (iv) $(2-a+b)$
(v) $(a^2-0.2)^2$ (vi) $(b-18)(b+4)$
(vii) $(1-x)(5-7x)$ (viii) $(3x^2-5y)(9x^4+15x^2y+25y^2)$

9. (i) $x+2y$ (ii) $(a-5)(a-2)(a+3)$
(iii) $(x+y+z)$ (iv) $(x+3y)(x+2y)(x+y)$ (v) x^2-1

10. (i) d (ii) b (iii) a (iv) c (v) b (vi) d

11. (i) d (ii) c (iii) c (iv) b (v) d.

مشق 6.1

1. (i) ایک ; دو (ii) دو ; ایک (iii) 2×2 (iv) 2×1
(v) مربعی ; 1×1 (vi) مربعی (vii) مربعی (viii) b

2. (i) درست (ii) غلط (iii) درست (iv) غلط (v) غلط
(vi) غلط (vii) غلط (viii) درست (ix) غلط (x) غلط
(xi) غلط

مشق 6.2

1. مساوی، ب
2. غیر مساوی قالب
3. مساوی قالب
4. $x = 3, y = -7$
5. $x = 10, y = 10$
6. $x = 1, y = 1$
7. ممکن نہیں ہے
8. ممکن نہیں ہے
9. $\begin{bmatrix} -1.3 & -3.2 \\ -8.1 & -5.6 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix}$
13. $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 7 & -12 \end{bmatrix}$
14. $\begin{bmatrix} -12 & 13 \\ -14 & 15 \end{bmatrix}$

مشق 6.3

1. $[2\ 8]$
2. ممکن نہیں ہے
3. ممکن نہیں ہے
4. $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$
5. ممکن نہیں ہے
6. $\begin{bmatrix} 7 \\ 23 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 30 & 7 \\ 35 & 10 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 18 & 3 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$
11. (a) $[5\ \ 4]$ (b) $\begin{bmatrix} 50 \\ 3 \end{bmatrix}$ (c) Rs. 370
12. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4.5 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 6.75 & 10.5 \end{bmatrix}$
13. جون کا منافع $= [18]$ ، ٹیکس $= [8]$
14. دسمبر کا منافع $= [23]$ ، ٹیکس $= [10]$

مشق 6.4

1. (a) -2 (b) $13\sqrt{2}$ (c) 0
2. (a) نادر (b) غیر نادر (c) نادر (d) غیر نادر
3. (a) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \sqrt{9} & -4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

4. (a) $-\frac{1}{16}\begin{bmatrix}7 & -5\\-6 & 2\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$ (c) $-\frac{1}{12}\begin{bmatrix}-5 & 1\\-8 & 4\end{bmatrix}$

(d) ضربی معکوس معلوم نہیں کیا جا سکتا (e) $\begin{bmatrix}5 & -5\\-2.5 & 7.5\end{bmatrix}$ (f) ضربی معکوس معلوم نہیں کیا جا سکتا۔

5. (c) C اور D ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں (d) جی ہاں

(e) جی ہاں عمومی نتیجہ یہ ہے: $|B| = n^2|A|$ if $B = nA$, $\forall n \in N$.

6. (i) $\frac{10}{3}$ (ii) 2 (iii) 9 (iv) 12

مشق 6.5

1. $\{(\frac{23}{24}, 1\frac{5}{12})\}$ 2. $\{(1, 1\frac{1}{2})\}$ 3. $\{(1, -2)\}$

4. $\{(-2, 1)\}$ 5. حل ممکن نہیں

6. $\{(-\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5})\}$ 7. $\{(4, -\frac{11}{3})\}$ 8. $\{(-\frac{53}{661}, \frac{150}{661})\}$

9. حل ممکن نہیں 10. $\{(12, -3)\}$

متفرق مشق VI

3. (i) درست (ii) درست (iii) درست (iv) غلط (v) غلط

(vi) (a) درست (b) غلط (c) غلط (d) درست

4. (i) $\begin{bmatrix}2 & -4\\4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-7\end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix}-2 & 3\\5 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\8\end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix}5 & -2\\3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix}0 & 5\\6 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix}2 & 3\\2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}$

5. (i) $2x - 3y = 0$, $x + 2y = 0$ (ii) $5x + 6y = -1$, $7x + 9y = -2$ (iii) $x = 3$, $y = 2$

(iv) $5x + 6y = 0$, $-2x - 3y = 0$

6. (i) نہیں (ii) نہیں (iii) نہیں (iv) جی ہاں

7. (i) $3 ; 3 ; 9$; جی ہاں (ii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \frac{1}{3}$; (iii) 27 ; (iv) 12

8. (i) مقطع (ii) نادر (iii) ضربی معکوس

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & -5b \\ -3c & 1 \end{bmatrix}$ (v) مساوی (vi) صفر (vii) اسکیلر

(viii) قطاروں (ix) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ (x) A^{-1}

مشق 8.1

1. $m\angle AOP = 70^\circ$; $m\angle POB = 110^\circ$; $m\angle AOQ$

2. بقیہ ایک زاویے کی مقدار = 30° دوسرے دو زاویوں کی مقدار = 150°

مشق 8.2

1. $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$

$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DFE$

$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta FDE$

$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta FED$

$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta EDF$

$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta EFD$

مشق 8.21

7. 2 سم ; 2 سم اور 6 سم ; 3.5 سم ; 10.5 سم

مشق 8.24

1. (i) قائمہ مثلث (ii) قائمہ مثلث (iii) قائمہ مثلث (iv) قائمہ مثلث (v) قائمہ مثلث نہیں ہے

2. (i) 25 فٹ 3. (a) $3\sqrt{3}$ اکائیاں (b) $x\sqrt{3}$ اکائیاں

متفرق مشق VIII

1. (i) خط مستقیم (ii) دو نقاط (iii) تین (iv) پلے فیئر (v) ان کے متناظرہ زاویے

(vi) تیسرا (vii) عمود (viii) b^2 (ix) وَتر (x) ناصف

2. (i) صحیح (ii) غلط (iii) غلط (iv) غلط (v) صحیح

فرہنگ اصطلاحات

اسکیلر قالب: ایسا وتری قالب جس کے وتر کے تمام ارکان برابر ہوں۔

الجبری اظہاریہ: ایسا اظہاریہ جو متغیرات یا مستقل مقداروں یا دونوں کو جمع، تفریق یا تقسیم، جذر کے ذریعہ ملائے۔

الجبری کسر: $\frac{P}{Q}$ کی طرز کا اظہاریہ الجبری کسر کہلاتا ہے جبکہ P, Q الجبری اظہاریے ہوں۔

اصم یا مقدار اصم: ایسا اظہاریہ جس کی کم از کم ایک رقم میں جذری علامت ہو۔

اکائی قالب: ایسا وتری قالب جس کے وتری عناصر 1 کے برابر ہوں۔

ایک۔ایک پر تفاعل: اگر سیٹ A سے B میں تفاعل f ایک ایک تفاعل کے ساتھ ساتھ 'پر تفاعل' بھی ہو۔

ایک ایک تفاعل: اگر f سیٹ A سے B میں ایسا تفاعل ہو کہ B کا ہر رکن A کے ایک سے زیادہ ارکان کی شبیہ نہ ہو۔

الجبری جملہ: اگر دو الجبری اظہاریوں کے درمیان $>$ ، $<$ ، $=$ ، $\leq$ ، $\geq$ وغیرہ میں سے کسی علامت سے تعلق قائم کیا جائے تو ایسا تعلق الجبری جملہ کہلاتا ہے۔

اسقاط: دیئے گئے روابط سے ایک ایسا ربط معلوم کرنے کے عمل کو جو روابط میں شامل کسی مخصوص متغیر سے آزاد ہو، اسقاط کہلاتا ہے۔

پر تفاعل: اگر سیٹ A سے B میں f ایسا تفاعل ہو کہ Rang f = B، تو f پر تفاعل یا *(Onto Function)* کہلاتا ہے۔

پائی گراف: اس ترسیمی شکل میں دائرے کو کئی قطعات میں اس طرح تقسیم کیا جاتا ہے کہ ان کے رقبے دی گئی مقدار کو جس نسبت سے تقسیم کیا جاتا ہے، اسی نسبت سے ہوتے ہیں۔

تحتی سیٹ: اگر سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا بھی رکن ہو تو سیٹ A کو سیٹ B کا تحتی سیٹ کہتے ہیں۔ اسے $A \subseteq B$ لکھتے ہیں۔

تفاعل: دو سیٹوں A اور B کا A سے B میں ایسا ثنائی ربط f جس میں (i) Dom f = A (ii) f کے کوئی بھی دو مترتب جوڑوں کے پہلے ارکان برابر نہ ہوں تو f تفاعل کہلاتا ہے۔

تغیر راست: اگر دو مقداروں کے درمیان اس طرح کا تعلق ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے سے دوسری مقدار بڑھے یا ایک مقدار کے کم ہونے سے دوسری مقدار کم ہو تو دونوں مقداروں کے درمیان اس تعلق کو تغیر راست کہتے ہیں۔

تغیر معکوس: اگر دو مقداروں کے درمیان اس طرح کا تعلق ہو کہ ایک مقدار کے بڑھنے سے دوسری مقدار کم ہو اور ایک مقدار کے کم ہونے سے دوسری مقدار بڑھے تو دونوں مقداروں کا ایسا تعلق تغیر معکوس کہلاتا ہے۔

تناسب: جب دو نسبتیں $a : b$ اور $c : d$ برابر ہوں یعنی $a : b = c : d$ تو چاروں مقداریں a, b, c اور d تناسب میں کہلاتی ہیں۔ یہ مقداریں متناسب کہلاتی ہیں۔

تکونیات: تکونیات Trigonometry کے لغوی معنی مثلث کی پیمائش کے ہیں۔ یہ ریاضی کی وہ شاخ ہے جس میں مثلثوں سے متعلق مختلف مسائل حل کیے جاتے ہیں۔

تکونیاتی نسبتیں: قائمہ مثلث کے کسی حادہ زاویے کے لیے کسی بھی دو اضلاع کی مقداروں کی نسبت تکونیاتی نسبت کہلاتی ہے۔

تغیر: مقداروں میں تبدیلی مثلاً درجہ حرارت، اشیاء کی قیمتیں، کسی ملک کی آبادی وغیرہ تغیر کہلاتی ہے۔

تغیریت: تغیریت وہ قیمت ہے جو کسی مواد میں انحرافات کے مربعوں کو جو کہ حسابی اوسط سے لیے گئے ہوں، کے مجموعہ کو ان کے مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

ثانوی مواد: ایسا مواد جو کم از کم ایک شماریاتی مرحلے سے گزر چکا ہو، ثانوی مواد کہلاتا ہے۔

ثنائی ربط: $A \times B$ کا تحتی سیٹ A سے B کا ثنائی ربط ہے۔

ثنائی کا حلقہ اثر (ڈومین): سیٹ A سے سیٹ B میں ثنائی ربط R کے تمام مترتب جوڑوں کے پہلے اجزاء کا سیٹ، جسے $\text{Dom } R$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

ثنائی ربط کا رو (رینج): سیٹ A سے سیٹ B میں ثنائی ربط R کے تمام مترتب جوڑوں کے دوسرے اجزاء کا سیٹ، جسے $\text{Range } R$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

جذر المربع: کسی حقیقی عدد x کے لیے $\sqrt{x}$، x کا جذر المربع کہلاتا ہے۔ علامت $\sqrt{\ }$ کو جذر کی علامت اور x کو مجذور کہتے ہیں۔ پس $\sqrt{x}$ سے مراد ایسا مثبت عدد y ہے جس کا مربع x ہو یعنی $y = \sqrt{x}$ اسی طرح دو حقیقی اعداد x، y اور قدرتی عدد n کے لیے اگر $x = y^n$ تو y، x کا n واں خاص جذر کہلاتا ہے اور اسے $y = \sqrt[n]{x}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

جمعی ذاتی قالب: ایسا قالب جس کو کسی قالب میں جمع کرنے سے وہی قالب حاصل ہو۔

جماعتی تعدد: کسی مخصوص جماعت میں مشاہدات کی تعداد، جماعتی تعدد کہلاتی ہے۔

جماعتی وقفہ: جماعتی وقفہ جماعت کی وہ جسامت یا لمبائی ہے جو دو متواتر جماعتوں کی زیریں یا بالائی حدود میں فرق کے برابر ہوتی ہے۔

جماعتی حدود: ہر جماعت یا گروہ میں دو قیمتیں ہوتی ہیں ایک چھوٹی اور دوسری بڑی، چھوٹی قیمت کو زیریں جماعتی حد اور بڑی قیمت کو بالائی جماعتی حد کہتے ہیں۔

جماعتی نشان: کسی جماعت کے وسطی نقطے کو جماعتی نشان کہا جاتا ہے۔ یہ زیریں اور بالائی جماعتی حدود کا اوسط ہوتا ہے۔

حسابی اوسط: حسابی اوسط وہ قیمت ہے جو تمام مشاہدات کے مجموعہ کو ان کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

حادہ زاویہ: ایسا زاویہ جس کی پیمائش 90° سے کم ہو۔

حادہ زاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں زاویے حادہ ہوں۔

حقیقی اعداد کا سیٹ: ناطق اعداد کے سیٹ Q اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ Q' کے اتصال کو حقیقی اعداد کا سیٹ کہتے ہیں اور اسے R سے ظاہر کرتے ہیں۔

خاصہ: کسی عدد کے لوگرتھم کے صحیح عددی حصے کو خاصہ کہتے ہیں۔

خالی سیٹ: ایسا سیٹ جس میں ایک بھی رکن نہ ہو۔ اسے $\varnothing$ یا $\{\ \}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

خط قاطع: دی ہوئی شکل میں خط n خط قاطع کہلاتا ہے۔ جو کہ خط l اور m کو قطع کرتا ہے۔

درمیان اور پرے: اگر A, B, C کوئی بھی تین ہم خط نقاط اس طرح ہوں کہ $m\overline{AB} + m\overline{BC} = m\overline{AC}$

تو نقطہ B نقاط A اور C کے درمیان کہلاتا ہے اور نقطہ C خط AB پر B سے پرے کہلاتا ہے اسی طرح نقطہ A خط BC پر B سے پرے کہلاتا ہے۔

دائرہ: مستوی کے کسی ایک معین (*Fixed*) نقطہ سے ہم فاصلہ نقاط کا سیٹ دائرہ کہلاتا ہے۔ معین نقطہ کو دائرے کا مرکز کہتے ہیں۔

دائرے کا محیط: کسی دائرے کے مرکز سے ہم فاصلہ تمام نقاط کو ملانے والے خط یعنی دائرے کی لمبائی کو دائرے کا محیط کہتے ہیں۔

دائروی چوکور: ایسا چوکور جس کے راس دائرے پر واقع ہوں، دائروی چوکور کہلاتا ہے۔۔

دائرے کا بیرونہ: نقاط کا ایسا سیٹ جن کا دائرے کے مرکز سے فاصلہ رداس سے زیادہ ہو، دائرے کا بیرونہ کہلاتا ہے۔

دائرے کا اندرونہ: نقاط کا ایسا سیٹ جن کا دائرے کے مرکز سے فاصلہ رداس سے کم ہو دائرے کا اندرونہ کہلاتا ہے۔

دائرے کا خط قاطع: ایسا خط مستقیم جو دائرے کو دو نقاط پر قطع کرے، دائرے کا خط قاطع کہلاتا ہے۔

دائرے کا سیکٹر: دائرے کے کوئی سے دو رداسی قطعات اور ان کے متعلقہ قوس سے گھرا ہوا دائروی علاقہ دائرے کا سیکٹر یا قطع دائرہ کہلاتا ہے۔

دو درجی مساوات: ایسی مساوات جس میں متغیر کا زیادہ سے زیادہ قوت نما دو ہو، دو درجی مساوات کہلاتی ہے۔

ڈی مورگن کے قوانین: اگر U کائناتی سیٹ ہو اور A اور B اس کے تحتی سیٹ ہوں۔

تو (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

کو ڈی مارگن کے قوانین کہتے ہیں۔

ذواضعاف اقل: دی گئی کثیر رقمیوں کے مشترک اضعاف میں سے کم سے کم درجہ کی ایسی کثیر رقمی جو دی گئی ہر کثیر رقمی سے پورا پورا تقسیم ہو جائے۔

ذوزنقہ: ایسا چوکور جس کے مخالف اضلاع کا صرف ایک جوڑا متوازی ہو۔

راسی زاویے: ایسے زاویے جن کے بازو مخالف شعاعوں کے دو جوڑے بناتے ہوں۔

رداسی قطعہ: دائرے کے مرکز سے اس کے کسی بھی نقطے کو ملانے والا قطعہ خط رداسی قطعہ کہلاتا ہے۔

رداس: رداسی قطعہ کی لمبائی رداس کہلاتی ہے۔

راست مشترک مماس: اگر دو دائروں کے مشترکہ مماسوں میں سے ہر ایک کے نقطہ مماس، دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ خط کے ایک ہی طرف واقع ہوں تو ایسے مشترک مماس راست مشترک مماس کہلاتے ہیں۔

زاویہ: دو غیر ہم خط شعاعوں کا اتصال جن کے سرے مشترک ہوں۔ شعاعیں جو زاویہ کی تشکیل کرتی ہیں انکے ضلعے یا بازو کہلاتے ہیں اور مشترک نقطہ زاویہ کا راس کہلاتا ہے۔

زاویہ قائمہ: ایسا زاویہ جس کی پیائش $90°$ ہو۔

زاویہ کا اندرونہ: مستوی کے ان تمام نقاط کا سیٹ جو کہ کسی زاویہ کے اندر ہوں۔

زاویہ کا بیرونہ: مستوی کے ان تمام نقاط کا سیٹ جو نہ تو زاویہ کے اندرونے میں ہوں اور نہ ہی زاویہ پر ہوں۔

زاویہ کا ناصف: ایسی شعاع جو کسی زاویہ کی تنصیف کرے۔

زاویے: اگر دو زاویوں کی پیائش کا مجموعہ $180°$ ہو تو وہ سپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔

سیٹ: واضح اشیاء کے اجتماع کو سیٹ کہتے ہیں جن اشیاء پر سیٹ مشتمل ہوتا ہے وہ اس سیٹ کے عناصر یا ارکان کہلاتے ہیں۔

سیٹ کا تکملہ یا کمپلیمنٹ: اگر U کائناتی سیٹ اور $A \subset U$ تو $U - A$ کو سیٹ A کا تکملہ یا کمپلیمنٹ کہتے ہیں جسے A' یا A^{c} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

سعت: دیئے گئے مواد میں سب سے بڑی قیمت اور سب سے چھوٹی قیمت کے فرق کو سعت کہتے ہیں۔

شعاع: اگر B, A کوئی دو نقاط ہوں تو شعاع AB جسے $\overrightarrow{AB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اتصال ہے: (I) $\overline{AB}$ کے تمام نقاط (II) $\overline{AB}$ میں B سے پرے کے تمام نقاط کا۔ نقطہ A کو $\overrightarrow{AB}$ کا سرا کہتے ہیں۔

صفری قالب: ایسا قالب جس کے تمام عناصر صفر ہوں اسے جمعی ذاتی قالب بھی کہتے ہیں۔

ضد لوگرتھم: اگر $\log x = y$ تو x , y کا ضد لوگرتھم کہلاتا ہے۔
اسے لکھتے ہیں: $x = \text{antilog}\, y$

ضربی ذاتی قالب: ایسا قالب جس کے خاص وتری عناصر 1 کے برابر ہوں اور اس کے علاوہ تمام عناصر صفر ہوں۔

طرفین: تناسب $a : b = c : d$ میں a اور d طرفین کہلاتے ہیں۔

عادہ: دیئے گئے مواد میں وہ قیمت جو سب سے زیادہ بار آئے عادہ کہلاتی ہے۔

عادِ اعظم: دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمیوں کے عادِ اعظم سے مراد ایسی بڑے سے بڑی کثیر رقمی (جو کہ دی ہوئی کثیر رقمیوں کے مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتی ہے) جو دی گئی کثیر رقمیوں میں سے ہر ایک کو پورا تقسیم کرتی ہے۔

عام لوگرتھم: اساس 10 والے لوگرتھم کو عام لوگرتھم یا برگز (*Briggs*) لوگرتھم کہتے ہیں۔

عددی سر: ایسا مستقل عدد (مقدار) جو کسی متغیر سے ضرب دیا گیا ہو۔

عمودی ناصف: ایک ایسا خطِ مستقیم جو کسی قطعہ خط کا ناصف ہو اور اس پر عمود بھی ہو۔

غیر متناہی سیٹ: ایسا سیٹ جس کے ارکان کی تعداد لامحدود ہو یعنی متناہی سیٹ نہ ہو۔

غیر مختتم غیر متوالی کسرِ اعشاریہ: ایسی کسرِ اعشاریہ جو غیر مختتم ہو اور اس کے کسری حصے میں چند ہندسوں کی تکرار ایک ہی ترتیب سے نہ ہو۔ ایسی کسورِ اعشاریہ کو کسرِ عام میں تحویل نہیں کیا جا سکتا۔

غیر نادر قالب: ایسا قالب جس کا مقطع صفر کے برابر نہ ہو۔

غیر ناطق اعداد: ایسے اعداد جنہیں p/q کی شکل میں لکھا نہ جا سکے۔

غیر ناطق اظہاریہ: ایسا الجبری اظہاریہ جو $p(x) / q(x)$ کی شکل میں نہ لکھا جا سکے۔
جبکہ $q(x) \neq 0$ اور $p(x), q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں۔

غیر واجب تحتی سیٹ: اگر A اور B کوئی دو سیٹ ہوں اور $A \subseteq B$ اور $B \subseteq A$ تو A اور B ایک دوسرے کے غیر واجب تحتی سیٹ ہیں۔

غیر ہم خط نقاط: ایسے نقاط جو ایک ہی خط پر واقع نہ ہوں۔

غیر مساوات: ایسا الجبری جملہ جس میں علامت $>$ یا $<$ ہو غیر مساوات کہلاتا ہے۔

غیر مسلسل متغیر: غیر مسلسل متغیر صرف مکمل عدد کی صورت میں ہوتا ہے۔ مثلاً خاندان میں بچوں کی تعداد وغیرہ۔

غیر مسلسل مواد: ایسا مواد جو غیر مسلسل متغیر سے متعلق ہو، غیر مسلسل مواد کہلاتا ہے۔

قطر: دائرے کے مرکز سے گزرتا ہوا وتر قطر کہلاتا ہے۔

قوس: دائرے کا کوئی سا حصہ قوس کہلاتا ہے۔

قوس صغیرہ: ایسی قوس جو نصف دائرے سے چھوٹی ہو، قوس صغیرہ کہلاتی ہے۔

قوس کبیرہ: ایسی قوس جو نصف دائرے سے بڑی ہو، قوس کبیرہ کہلاتی ہے۔

قوس کا مرکزی زاویہ: کوئی قوس دائرے کے مرکز پر جو زاویہ بناتی ہے اس کو مرکزی زاویہ کہتے ہیں۔

قوس کا محصور زاویہ: کسی قوس سے بننے والے ایسے زاویہ کو محصور زاویہ کہتے ہیں۔ جس کا راس قوس کا کوئی نقطہ ہو اور جس کے بازو قوس کے سروں سے گزریں۔

قائمہ مثلث: ایسی مثلث جس کے ایک زاویے کی مقدار 90° ہو یعنی زاویہ قائمہ ہو، قائمہ مثلث کہلاتا ہے۔
قائمہ مثلث کے قائمہ زاویہ کے سامنے والا ضلع وتر کہلاتا ہے۔ اس کے زیر بحث زاویہ کے سامنے والا ضلع عمود اور اس سے متصلہ ضلع قاعدہ کہلاتا ہے۔

قالب: اشیاء (اعداد یا متغیرات) کی مستطیلی یا مربعی شکل کی جدولیں جن کے عناصر کو مخصوص ترتیب سے بڑے خطوط وحدانی میں لکھا جاتا ہے۔

قالب کا بدل (ٹرانسپوز): کسی بھی مرتبہ کے قالب کی قطاروں کو کالموں اور کالموں کو قطاروں میں تبدیل کرنے سے حاصل ہونے والا قالب۔

قالب کا جمعی معکوس: اگر دو قالب ایسے ہوں کہ ان کا مجموعہ صفری قالب ہو تو وہ ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

قالب کا ضربی معکوس: اگر دو قالبوں کا حاصل ضرب اکائی قالب ہو تو دونوں ایک دوسرے کے ضربی معکوس کہلاتے ہیں۔

قالب کا مقطع: مربع قالب سے منسلک عدد اس کا مقطع کہلاتا ہے۔ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، مربع قالب ہو تو اس کا مقطع اس طرح ظاہر کرتے ہیں: $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

قالب کا متصل: ایسا قالب جو دیئے ہوئے 2×2 قالب کے وتری ارکان کو آپس میں تبدیل کر کے اور دوسرے ارکان کی علامات بدل کر حاصل کیا جاتا ہے۔

قالب کا مرتبہ: اگر کسی قالب میں r قطاریں اور c کالم ہوں تو $r \times c$ کو قالب کا مرتبہ کہتے ہیں۔

قائمہ زاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو۔

قدرتی لاگرتھم: اساس e والے لوگرتھم کو قدرتی لوگرتھم یا نیپیرین (Naperian) لوگرتھم کہتے ہیں۔

قطاری قالب: ایسا قالب جس میں صرف ایک قطار ہو۔

قطعہ خط: اگر A اور B کوئی دو نقاط ہیں تو قطعہ خط AB جسے $\overline{AB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے ان تمام نقاط پر مشتمل ہوتا ہے:
(i) نقاط A اور B پر اور (ii) ان تمام نقاط پر جو A اور B کے درمیان ہیں۔
نقاط A اور B قطعہ خط AB کے سرے کہلاتے ہیں۔

قوت سیٹ: کسی سیٹ کے تمام ممکنہ تحتی سیٹوں کا سیٹ قوت سیٹ کہلاتا ہے۔

قوت نما اور اساس: a^n کو a کی n ویں قوت کہتے ہیں، a کو اساس اور n کو قوت نما کہتے ہیں۔

کارتیسی حاصل ضرب: اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو ان کا کارتیسی حاصل ضرب $A \times B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور
$A \times B = \{(a , b) \mid a \in A$ اور $b \in B\}$

کارتیسی محددات: کسی مترتب جوڑے $P(x , y)$ میں x اور y نقطہ P کے کارتیسی محددات کہلاتے ہیں۔ x کو x - محدد یا فصلہ اور y کو y - محدد یا معینہ کہتے ہیں۔

کالمی قالب: ایسا قالب جس میں صرف ایک کالم ہو۔

کائناتی سیٹ: ایسا سیٹ جو زیر بحث سیٹوں کے تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ اسے U سے ظاہر کرتے ہیں۔

کثیر رقمی: ایسا الجبری اظہاریہ جس کی ہر رقم میں متغیر یا متغیرات کا قوت نما صفر یا مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔

کمپلیمنٹری زاویے: اگر دو زاویوں کی پیائش کا مجموعہ °90 ہو تو کمپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔

کالمی شکل: یہ مواد کو ترسیمی طور پر پیش کرتی ہے۔ اس میں ایک ہی چوڑائی کے افقی (یا عمودی) کالم ہوتے ہیں۔ جن کی لمبائیاں دی گئی کی قیمتوں کی نسبت سے دی جاتی ہیں۔

کالمی نقشہ: کالمی نقشہ متصل عمودی مستطیلوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

کھلے جملے: ایسے جملے جن کے غلط یا صحیح ہونے کے لیے دی گئی شرائط کو مکمل کرنا ضروری ہو، کھلے جملے کہلاتے ہیں۔

گروہی مواد: مواد کو کئی گروہوں میں اپنی ضرورت کی بنا پر ترتیب دیا جائے تو اس مواد کو گروہی مواد کہتے ہیں۔

لوگرتھم: اگر $a^y = x$ تو y کو a کی اساس پر x کا لوگرتھم کہتے ہیں اور اس کو $y = \log_a x$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مترادف سیٹ: اگر دو سیٹوں کے ارکان کے درمیان ایک۔ایک مطابقت قائم ہو یعنی دونوں کے ارکان تعداد میں برابر ہوں تو وہ مترادف سیٹ کہلاتے ہیں۔

مترتب جوڑا: دو اعداد کا ایسا جوڑا جس میں ان کی ترتیب کا خاص خیال رکھا جائے۔

متصلہ زاویے: دو زاویے متصلہ کہلاتے ہیں اگر

(i) ان کا راس مشترک ہو

(ii) ان کا ایک بازو مشترک ہو (iii) ان کے اندرونے کا تقاطع خالی سیٹ ہو۔

متغیر مقدار: متغیر ایک ایسی علامت ہوتی ہے جو کسی غیر خالی سیٹ کے ارکان کو ظاہر کرتی ہے۔

متماثل الساقین ذوزنقہ: ایسا ذوزنقہ جس میں دونوں غیر متوازی اضلاع متماثل ہوں۔

متماثل الساقین مثلث: ایسی مثلث جس کے دو اضلاع متماثل ہوں۔

متماثل زاویے: دو زاویے متماثل کہلاتے ہیں اگر ان کی پیمائش مساوی ہو۔

متماثل مثلثان: دو مثلث متماثل کہلاتی ہیں اگر ان کے متناظرہ ضلعے اور زاویے متماثل ہوں۔

متناہی سیٹ: ایسا سیٹ جس کے ارکان کی تعداد محدود ہو۔

متوازی الاضلاع: ایسا چوکور جس کے مخالف اضلاع متوازی ہوں۔

متوازی خطوط: دو خطوط متوازی کہلاتے ہیں اگر

(i) وہ ہم مستوی ہوں (ii) ایک دوسرے کو قطع نہ کرتے ہوں

متوالی کسر اعشاریہ: ایسی کسر اعشاریہ جو غیر مختتم ہو اور جس کے کسری حصے میں چند ہندسے بار بار ایک ہی ترتیب میں آتے ہوں۔ان کو آسانی سے کسر عام میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

مثلث: قطعات خط $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کا اتصال مثلث ABC کہلاتا ہے جبکہ A, B اور C غیر ہم خط نقاط ہوں۔ مثلث ABC کو ΔABC سے ظاہر کرتے ہیں۔ نقاط A, B اور C اس کے راس ہیں۔ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ مثلث کے زاویے ہیں۔

مثلث کا ارتفاع: کسی مثلث میں اس کے کسی راس سے اس کے متقابلہ ضلع پر کھینچا جانے والا عمود اس کا ارتفاع کہلاتا ہے۔

مثلث کا اندرونہ: ان نقاط کا سیٹ جو مثلث کے تینوں زاویوں کے اندرونے میں ہوں۔

مثلث کا اندرونی زاویہ: مثلث ABC میں A∠ ، B∠ اور C∠ مثلث کے اندرونی زاویے کہلاتے ہیں۔

مثلث کا بیرونہ: ان نقاط کا سیٹ جو نہ مثلث پر ہوں اور نہ اس کے اندرونے میں ہوں۔

مثلث کا بیرونی زاویہ: ایسا زاویہ جو کسی مثلث کے اندرونی زاویہ کا متصلہ اور سپلیمنٹری زاویہ ہو اسے مثلث کا بیرونی زاویہ کہتے ہیں۔

محدب سیٹ: مستوی کے نقاط یا ایسا سیٹ جس میں اس کے کسی دو نقاط A اور B کے لیے قطعہ خط AB اس سیٹ میں موجود ہو۔

مختتم کسر اعشاریہ: ایسی کسر اعشاریہ جس کے کسری حصہ میں ہندسوں کی تعداد محدود ہو۔ ایسی کسور اعشاریہ آسانی سے کسر عام کی صورت میں تحویل کی جاسکتی ہیں۔

مختلف الاضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع متماثل نہ ہوں۔

مربع: ایسا مستطیل جس کے متصلہ اضلاع متماثل ہوں۔

مربعی قالب: ایسا قالب جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو۔

مساوی الاضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع متماثل ہوں۔

مساوی سیٹ: ایسے سیٹ جن کے ارکان ایک جیسے ہوں۔

مساوی قالب: ایسے دو قالب جن کے مرتبہ ایک ہی ہوں اور متناظرہ عناصر برابر ہوں۔

مستطیل: ایسا متوازی الاضلاع جس کا کم از کم ایک زاویہ قائمہ ہو۔

مستطیلی قالب: ایسا قالب جس میں قطاروں کی تعداد کالموں کی تعداد کے برابر نہ ہو۔

مستقل مقدار: ایسی مقدار جس کی قیمت تبدیل نہ ہو۔

مسئلہ باقی: اگر کثیر رقمی $p(x)$ جس کا درجہ n جبکہ $(n \geq 1)$ ہو، کو یک درجی کثیر رقمی $(x - a)$ سے تقسیم کرنے پر باقی $r = p(a)$ حاصل ہوتا ہے۔

معین: ایسا متوازی الاضلاع جس کے متصلہ اضلاع متماثل ہوں۔

منفرجہ زاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کا ایک زاویہ منفرجہ ہو۔

مینٹیسہ: کسی عدد کے لوگرتھم کے کسری حصہ کو مینٹیسہ کہتے ہیں اور یہ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

متغیر: ایسی مقدار جس کی قیمت متعین نہ ہو بلکہ بدلتی رہے، متغیر کہلاتی ہے۔

معیاری انحراف: معیاری انحراف، تغیریت کا مثبت جذر المربع ہے۔

مقداری متغیر: ایسا متغیر جس کی قیمت عددی ہو، مقداری متغیر کہلاتا ہے۔

معلومات داری: معلومات کو تجزیئے اور توضیح کے لیے مناسب طریقے سے پیش کرنے کا نام معلومات داری ہے۔

مسلسل متغیر: مسلسل متغیر ایک ایسا متغیر ہے جس کی مقدار کو حقیقی عدد سے ظاہر کیا جا سکے۔ مثلاً کسی شخص کی عمر

مواد: مخصوص خصوصیات کی حامل ماہیتی یا مقداری معلومات مواد کہلاتی ہے۔

موادیٹ: مخصوص مقصد کے لیے جمع کردہ مواد کو موادیٹ کہتے ہیں۔

مطلق قیمت: ہر غیر صفر حقیقی عدد x کی مطلق قیمت $|x|$ ہمیشہ مثبت ہوتی ہے یعنی

$$|x| = x , \forall x \geq 0$$

$$= -x , \forall x < 0$$

اور حقیقی عدد صفر کی مطلق قیمت صفر ہوتی ہے۔

مسلسل تناسب: تین مقداریں a , b اور c مسلسل تناسب میں کہلاتی ہیں اگر

$$a : b = b : c$$

مساوات: ایسا الجبری جملہ جس میں علامت = ہو، مساوات کہلاتا ہے۔

مثلث کا محاصر دائرہ: ایسا دائرہ جو مثلث کے تینوں راسوں سے گزرتا ہے، مثلث کا محاصر دائرہ کہلاتا ہے۔

مثلث کا محصور دائرہ: ایسا دائرہ جو مثلث کے تینوں اضلاع سے مس کرتا ہے۔ مثلث کا محصور دائرہ کہلاتا ہے۔

مثلث کا جانبی دائرہ: ایسا دائرہ جو مثلث کے ایک ضلع کو بیرونی طور پر اور دیگر دو بڑھے ہوئے اضلاع کو اندرونی طور پر مس کرتا ہے۔ مثلث کا جانبی دائرہ کہلاتا ہے۔

متماثل دائرے: ایسے دائرے جن کے رداس مساوی ہوں، متماثل دائرے کہلاتے ہیں۔

مماس: ایسا خط مستقیم جو دائرے کو صرف اور صرف ایک نقطے پر مس کرے، مماس کہلاتا ہے۔

معکوس مشترک مماس: اگر دو دائروں کے مشترک مماسوں میں ہر ایک کے نقاط مماس دائروں کے مراکز کو ملانے والے خط کے مخالف اطراف میں ہوں تو دائروں کے ایسے مشترک مماس، معکوس مشترک مماس کہلاتے ہیں۔

نصف دائرہ: دائرے کے نصف محیط پر مشتمل شکل نصف دائرہ کہلاتی ہے۔

نسبت: ایک جیسی مقداروں a اور b کی نسبت اس طرح ہوتی ہے۔

$$a : b = \frac{a}{b}$$

a اور b اس کی رقوم کہلاتی ہیں۔ a مقدم اور b موخر کہلاتی ہے۔

نمونہ: آبادی کے تحتی سیٹ کو نمونہ کہتے ہیں۔

نادر قالب: ایسا قالب جس کا مقطع صفر ہو۔

ناطق اظہاریہ: ایسا الجبری اظہاریہ جو $p(x)/q(x)$ کی شکل میں لکھا جا سکے جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں اور $q(x) \neq 0$

ناطق اعداد: وہ تمام اعداد جنہیں p/q کی شکل میں لکھا جا سکے، جبکہ p , q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$

نصف خط: نقطہ A کے علاوہ شعاع AB کو نصف خط AB کہتے ہیں جسے $\overrightarrow{AB}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

وتری قالب: ایسا قالب جس کے خاص وتری عناصر کے علاوہ تمام عناصر صفر ہوں۔

وین اشکال: اشکال کے ذریعہ بھی سیٹوں کو ظاہر کیا جاتا ہے جنہیں وین اشکال کہتے ہیں۔

واجب تحتی سیٹ: اگر سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہو اور $A \neq B$ تو سیٹ A کو سیٹ B کا تحتی سیٹ کہتے ہیں اور $A \subset B$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

وسطانیہ: مثلث کے کسی راس اور اس کے متقابل ضلع کے وسطی نقطہ کو ملانے والا قطعہ خط وسطانیہ کہلاتا ہے۔

ہم خط نقاط: ایسے نقاط جو ایک ہی خط پر واقع ہوں۔

وسطین: تناسب $a : b = c : d$ میں b اور c وسطین کہلاتے ہیں۔

وسطانیہ: جب مواد کسی ترتیب یعنی بڑھتی یا گھٹتی ہوئی صورت میں ہو تو وسطانیہ وہ قدر ہے جو اس پورے مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کر دے یعنی مواد کا پچاس فیصد وسطانی قدر سے پہلے اور پچاس فیصد اس کے بعد ہوتا ہے۔

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8696	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8730	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9603	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1027	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2103	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						4	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	15	19	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	7	10	13	16	20	23	26	30
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	16	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	24
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	5	8	11	14	17	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	16	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8